FOGLIO 2

Soluzioni

⊙ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che i vettori $(1, 2, h)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 5, 7)$ di $\mathbf{R}^3$ siano linearmente dipendenti.

[4] Per ottenere l'1 del terzo vettore dobbiamo prendere il primo vettore senza modifiche e poi aggiungere β volte il secondo vettore in modo che $2 + \beta \cdot 1 = 5$, quindi $\beta = 3$ e a questo punto h è costretto a valere 4. Oppure possiamo ridurre a gradini e imporre che un pivot scompaia.

⊙ Determinare il numero nel posto $(2, 1)$ della matrice 3×2 risultante dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

[−17]

⊙ Determinare z in modo che il prodotto

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ z \\ 20 \end{pmatrix}$$

dia come risultato il vettore colonna $\begin{pmatrix} 80 \\ 46 \end{pmatrix}$. [5]

⊙ Calcolare il rango (ad esempio mediante una riduzione a gradini) della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

[2]

⊙ Un sistema di quattro equazioni in quattro incognite può avere infinite soluzioni. [V]
Il rango dovrebbe valere al più 3 e ciò è in effetti possibile.

⊙ Se $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono vettori linearmente indipendenti, lo sono anche

$$\underline{u} + \underline{v}\ ,\ \ \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}\ ,\ \ \underline{w}\ .$$

[F]

A prescindere dalle proprietà specifiche dei tre vettori iniziali, avremo sempre $\underline{w} = (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) - (\underline{u} + \underline{v})$.

⊙ Il prodotto di due matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore. [V]

⊙ La matrice completa (quella che comprende anche i termini noti) di un sistema in tre incognite può avere rango 4. [V]
Ciò accade precisamente quando il sistema non è risolubile (pivot nella colonna dei termini noti).

Esercizio 1.

Senza calcolare esplicitamente il punto d'intersezione, dimostrare che le tre rette descritte nel seguente sistema hanno esattamente un punto in comune (*utilizzare i vettori direttori per dimostrare che non sono parallele a due a due; successivamente trovare un'opportuna combinazione lineare che renda "inutile" una delle tre equazioni*).

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ x+7y=15 \end{cases} .$$

Sol. I tre rispettivi vettori direttori numerici $(1,-1)$, $(1,2)$, $(-7,1)$ sono a due a due non proporzionali, quindi non sussiste alcun parallelismo. Ora, per fare in modo che

$$\alpha(1,1,3)+\beta(2,-1,0)=(1,7,15)$$

per certi numeri reali α e β, necessariamente α deve essere uguale a 5 (guardiamo infatti la terza componente) e a questo punto la prima componente ci suggerisce $\beta=-2$. Controlliamo poi, con successo, che la seconda componente venga uguale a 7 per i valori di α e β che abbiamo trovato.

Senza ricorrere a questi passaggi ad hoc, in generale è possibile risolvere un sistema di tre equazioni nelle incognite α e β.

Esercizio 2.

Mediante un'idonea riduzione a gradini, effettuando una sola operazione elementare, risolvere il seguente sistema (*verranno assegnati due parametri ad es. al posto delle incognite w e z*).

$$\begin{cases} 2x+y+w-z=3 \\ 3x-y+4w+z=7 \end{cases} .$$

Sol. Considerando la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

è sufficiente una sola "mossa", ad esempio

$$\underline{r}_2 \to 2\underline{r}_2 - 3\underline{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) .$$

Possiamo anche dividere la nuova $\underline{r}_2$ per 5 o -5 (più precisamente, trasformiamo $\underline{r}_2$ in $-\frac{1}{5}\underline{r}_2+0\underline{r}_1$). Abbiamo in ogni caso due pivot e le incognite non coinvolte sono w e z; esse diventano i rispettivi parametri s e t. Arriviamo così al sistema

$$\begin{cases} 2x+y=3-s+t \\ -y=1-s-t \end{cases} .$$

A ritroso, cambiando segno abbiamo subito la y uguale a $-1+s+t$ e troviamo successivamente

$$x=\frac{1}{2}(3-s+t-y)=\frac{1}{2}(3-s+t+1-s-t)=2-s .$$

La soluzione generale è pertanto

$$(x,y,w,z)=(2-s,-1+s+t,s,t) \;:\; s,t\in\mathbf{R} .$$

Esistono diversi modi di ridurre a gradini. Ad esempio

$$\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 + \underline{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 10 \end{array}\right) .$$

Scambiando le incognite x e y otteniamo nuovamente una scala, e proseguiamo. Possiamo anche lavorare direttamente senza scala, con un po' di esperienza. Possiamo anche selezionare altri due parametri (con ancora un po' più di esperienza...).