FOGLIO 2, soluzioni

$\diamondsuit$ Dieci vettori sono linearmente dipendenti se ad es. due di loro sono proporzionali. [V]

Dati $\underline{v}_1$, ... , $\underline{v}_{10}$, se $\underline{v}_1 = h\underline{v}_2$ allora $1\underline{v}_1 - h\underline{v}_2 + \sum_{i=3}^{10} 0 \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$ e quindi abbiamo ottenuto lo zero con coefficienti non tutti nulli (notiamo che potremmo anche avere $h = 0$).

$\diamondsuit$ Tre vettori sono linearmente indipendenti se essi non sono proporzionali a due a due. [F]
Ad esempio $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ sono linearmente dipendenti.

$\diamondsuit$ I vettori di $\mathbf{R}^3$ costituiti da numeri reali non negativi formano un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. [F]

$\diamondsuit$ L'unione di due sottospazi è un sottospazio. [F]
Pensiamo, ad esempio, ai vettori (applicati in O) lungo una direzione, nel piano Oxy, e ai vettori lungo un'altra direzione (quindi due giaciture di rette). Appena ne sommiamo due su rette diverse... usciamo dalle rette.

$\diamondsuit$ L'intersezione di due sottospazi è un sottospazio. [V]
Il ragionamento fatto prima, sull'unione, qui non funziona. Altri tentativi di trovare difetti si inceppano, anche per altri spazi vettoriali. Proviamo allora ad essere ottimisti dimostrando che la proprietà è vera in generale. Presi due vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ in $S \cap T$ allora $\underline{u} + \underline{v} \in S$ perché per ipotesi S è un sottospazio, poi anche ... ecc.

$\diamondsuit$ I polinomi di grado pari (quindi 0, 2, 4, ...) costituiscono un sottospazio nello spazio vettoriale di tutti i polinomi. [F]
Ad es. $(x^2 + 2x - 3) - (x^2 - x + 7) = 3x - 10$ e quindi siamo andati fuori dall'insieme definito nel testo.

$\triangledown$ Determinare α in modo che i vettori numerici di $\mathbf{R}^3$

$$(1, 4, \alpha)\ ,\ (0, 2, 6)\ ,\ (8, 16, 9)$$

siano linearmente dipendenti.
[$\frac{57}{8}$] (il suggerimento dell'esercizio successivo vale anche per questo esercizio, con le dovute modifiche, ma è possibile in alternativa ridurre a gradini e discutere; poi col determinante sarà molto più semplice)

$\triangledown$ Determinare α in modo che i vettori numerici di $\mathbf{R}^4$

$$(1, 2, 3, \alpha)\ ,\ (0, 1, 2, 3)\ ,\ (5, 5, 5, 10)$$

siano linearmente dipendenti (un sugg. *Trovare prima due coefficienti reali p_1 e p_3 tali che il primo e il terzo vettore diano in combinazione lo zero iniziale del secondo vettore, poi trovare p_2 ecc.* Oppure *sottrarre il secondo vettore dal primo...*).
[5]

$\triangledown$ Calcolare il numero massimo di vettori linearmente indipendenti nell'insieme

$$\{(0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{3}), (4, 7), (0, 0), (0, 1)\}\ .$$

[2]

$\triangledown$ Data una base $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ di un fissato spazio vettoriale, calcolare il numero massimo di vettori linearmente indipendenti nell'insieme

$$\{\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{w}, \underline{v} + \underline{w}, \underline{0}, 5\underline{w} - 5\underline{u}\}\ .$$

[2]

$\triangledown$ Determinare il numero di parametri nelle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 8x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} .$$

[3]

(numero di incognite meno il rango)
$\bigtriangledown$ Determinare $\beta \in \mathbf{R}$ in modo che l'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + \beta + 1 = 0\}$$

sia un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.
[-1]
Per valori maggiori di -1 l'insieme è vuoto; per valori minori esso non contiene lo zero $(0, 0, 0)$; invece ... esso è proprio il solo zero, per $\beta = -1$.

Esercizio A.
Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + y = 4 \\ 5x - 2y = 13 \\ 3x - 10y = 23 \end{cases}$$

eliminando le ultime due equazioni mediante la riduzione a gradini. Come sono disposte le 4 rette nel piano Oxy?

Sol.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 13 \\ 3 & -10 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{r}_2 \to 2\underline{r}_2 - 3\underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 \to 2\underline{r}_3 - 5\underline{r}_1 \\ \underline{r}_4 \to 2\underline{r}_4 - 3\underline{r}_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 11 & -19 \\ 0 & 11 & -19 \\ 0 & -11 & 19 \end{array}\right) ,$$

$$\begin{array}{l} \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - \underline{r}_2 \\ \underline{r}_4 \to \underline{r}_4 + \underline{r}_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y = -\frac{19}{11} \ , \ x = \frac{1}{2}(3y + 9) = \frac{1}{2}\frac{-57 + 99}{11} = \frac{21}{11} \ .$$

Le 4 rette sono contenute nel fascio di rette il cui centro è il punto $\left(\frac{21}{11}, -\frac{19}{11}\right)$.

Esercizio B.
Calcolare una base del sottospazio di $\mathbf{R}^5$ costituito dai vettori della forma $(a, b, c, 3b, -a)$.
Trovare invece l'errore che si commette nel porre la domanda seguente: Calcolare una base del sottospazio di $\mathbf{R}^2$ *costituito dai vettori della forma* $(a - 2, 6a)$.
Calcolare infine una base del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori della forma $(a + b, a + c, 2a + b + c, 0)$.

Sol. La base più semplice, anche più naturale, è quella ottenuta col metodo "$0 - 1$" ,

$$\{(1, 0, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\} \ ,$$

ma se vogliamo punirci possiamo anche scegliere come base ad esempio

$$\left\{ (\pi\, , \sqrt{2}\, , 8\, , 3\sqrt{2}\, , -\pi) \ , \ (79\, , -10\, , 0\, , -30\, , -79) \ , \ (2^9\, , 2^9\, , 2^9\, , 3 \cdot 2^9\, , -2^9) \right\} ,$$

perché comunque i tre nuovi vettori sono linearmente indipendenti (non è così agevole dimostrare che essi sono linearmente indipendenti... provare con una bella riduzione a gradini oppure qui ci vorrebbe il determinante... Forse in questo caso funziona meglio il classico sistema della combinazione lineare con α, β, γ che alla fine necessariamente dovranno valere zero. Oppure, a ben vedere, potremmo dividere il terzo vettore per 2^9 per poi puntare ad ottenere l'8 centrale nel primo vettore e infine dovremo rinunciare a generare il secondo vettore)

L'errore è l'aver deciso che *siamo in presenza di un sottospazio*. Proviamo infatti a sommare due vettori generici:

$$(a-2, 6a) + (\tilde{a}-2, 6\tilde{a}) = ((a+\tilde{a})-4, 6(a+\tilde{a}))\ .$$

Per salvare la seconda componente, volendo mantenere la sua forma originale, dobbiamo chiamarla $6A$, dobbiamo cioè pensarla come $6A$, ma allora la prima componente non viene uguale a $A-2$ (abbiamo infatti $A-4$) quindi la somma ottenuta non è più della stessa forma. Un altro modo per dimostrare che non abbiamo un sottospazio è notare l'assenza dello zero (perché...).

Nell'ultima parte dell'esercizio, un insieme di generatori è certamente

$$\{(1,1,2,0),(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$$

ma i suoi elementi non sono linearmente indipendenti (perché...), quindi occorre eliminarne uno a piacere, restando così con due vettori non proporzionali e quindi linearmente indipendenti.