FOGLIO 8

Soluzioni

$\odot$ In $\mathbf{R}^5$, calcolare la dimensione del sottospazio $S^\perp$ ortogonale al sottospazio $S = \langle(2,1,3,4,2),(1,0,0,0,0),(5,1,3,4,2),(-7,0,0,0,0)\rangle$. [3]

S ha dimensione 2 perché due dei quattro vettori dati sono superflui, quindi $S^\perp$ è definito da 2 equazioni e restano $5-2$ parametri essenziali.

$\odot$ Calcolare la quarta coordinata del vettore $(9,8,7,6)$ rispetto alla base $\{(\sqrt{2},\sqrt{2},0,0),(-\sqrt{2},\sqrt{2},0,0),(0,0,1,\sqrt{3}),(0,0,\sqrt{6},-\sqrt{2})\}$. [$\frac{7\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{8}$]

Poiché la base è ortogonale, è sufficiente calcolare il quarto coefficiente di Fourier,

$$\frac{(9,8,7,6)\times(0,0,\sqrt{6},-\sqrt{2})}{(0,0,\sqrt{6},-\sqrt{2})\times(0,0,\sqrt{6},-\sqrt{2})} \; .$$

$\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^7$ definita da

$$f(1,0,0,0)=f(0,1,0,0)=(1,1,1,1,1,1,1)\;, f(0,0,1,0)=f(0,0,0,1)=(\sqrt{7},\sqrt{6},3,3,3,3,3)\;.$$

[2]

La matrice relativa alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{7} \\ 1 & 1 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \; .$$

Il suo rango vale 2, quindi la dimesione del nucleo è uguale a $4-2$.

$\odot$ Calcolare la minima dimensione che può avere il sottospazio intersezione di due sottospazi di dimensione 5 in $\mathbf{R}^7$. [3]

In accordo con la formula di Grassmann, se S e T hanno dimensione 5 allora

$$dim(S\cap T) = 5+5-dim(S+T)$$

e la somma $S+T$ è un sottospazio di dimensione al più 7 per l'ipotesi sullo spazio ospite.

$\odot$ Calcolare il numero massimo di sottospazi tridimensionali, in $\mathbf{R}^{37}$, che siano a due a due ortogonali tra loro. [12]

Dobbiamo selezionare il massimo numero di terne di vettori che siano nella loro totalità linearmente indipendenti, quindi otteniamo la parte intera di $\frac{37}{3}$, in simboli $\left[\frac{37}{3}\right]$, il massimo intero p tale che $3p \leq 37$.

$\odot$ La proiezione ortogonale di un vettore di $\mathbf{R}^3$ rispetto al sottospazio $\mathbf{R}^3$ stesso, è il vettore stesso. [V]

Questo è proprio il motivo del successo dei coefficienti di Fourier! In dettaglio, sottraendo al vettore il vettore stesso, otteniamo in effetti un vettore ortogonale (il vettore nullo), e il vettore stesso ha il diritto di chiamarsi "proiezione" perché fa parte del sottospazio.

$\odot$ La funzione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(\underline{v}) = \underline{v}\times(7,5,3)$, è iniettiva. [V]

Si tratta della funzione espressa dalla legge $f(x,y,z) = 7x+5y+3z$.

$\odot$ L'unione di due sottospazi non è in alcun caso un sottospazio. [F]

Uno dei due sottospazi potrebbe contenere l'altro.

$\odot$ La somma dei sottospazi $\{matrici\ triangolari\ superiori\ 2 \times 2\}$ e $\{matrici\ simmetriche\ 2 \times 2\}$ ha dimensione 3. [F]

La Formula di Grassmann assicura che la dimensione in esame vale $3 + 3 - 2 = 4$, dove il 2 è la dimensione dell'intersezione, costituita dalle matrici diagonali (matrici triangolari e al tempo stesso simmetriche).

$\odot$ La composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva. [V]

La prima funzione porta due elementi distinti in due distinti; anche la seconda ha tale proprietà, quindi realizziamo un ponte che trasporta due elementi iniziali distinti in due finali distinti.

Esercizio 1. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(2, 1, 4, 3)$ rispetto al sottospazio

$$S = \langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{5}), (1, 1, 1, 1) \rangle \subset \mathbf{R}^4 \ .$$

(attenzione alla dimensione di S, e poi... esiste anche una scorciatoia rispetto all'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, scrivendo un'equazione cartesiana di S — *una sola*! — e poi utilizzando il "chiodo"...)

Sol. Il rango della matrice che ha per righe i vettori dati vale 3; ad esempio, il terzo vettore è generato dai restanti 3 e questi sono linearmente indipendenti. Ora, anziché ortogonalizzare i tre vettori mediante un duplice procedimento di Gram-Schmidt, è consigliabile scrivere un'equazione cartesiana di S:

$$S : \begin{vmatrix} x & y & w & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ w - z = 0 \ ,$$

per poi prelevare un vettore ortogonale a S mediante i coefficienti dell'equazione. Otteniamo $(0, 0, 1, -1)$ ed ora possiamo calcolare la proiezione sottraendo a $(2, 1, 4, 3)$ la sua proiezione sul sottospazio ortogonale a S:

$$\underline{p} = (2, 1, 4, 3) - \frac{(2, 1, 4, 3) \times (0, 0, 1, -1)}{(0, 0, 1, -1) \times (0, 0, 1, -1)}(0, 0, 1, -1) =$$

$$= (2, 1, 4, 3) - \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) = \left(2, 1, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \ .$$

Esercizio 2. Calcolare una base ortogonale del sottospazio $W \subset \mathbf{R}^5$ descritto dal sistema

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases} \ .$$

Sol. Risolviamo il sistema col metodo della sostituzione: $x_2 = x_5$; $x_3 = -x_4 - x_5$; $x_1 = x_5 - (-x_4 - x_5) = x_4 + 2x_5$. Abbiamo dunque due parametri e la soluzione generale è $(s + 2t, t, -s - t, s, t)$. La conferma che l'insieme delle soluzioni ha due gradi di libertà viene dal rango della matrice incompleta; esso vale 3 e infatti $5 - 3 = 2$. Una base di W è $\{(1, 0, -1, 1, 0), (2, 1, -1, 0, 1)\}$. Lasciando invariato il primo vettore e ortogonalizzando il secondo otteniamo:

$$(2, 1, -1, 0, 1) - \frac{(2, 1, -1, 0, 1) \times (1, 0, -1, 1, 0)}{(1, 0, -1, 1, 0) \times (1, 0, -1, 1, 0)}(1, 0, -1, 1, 0) =$$

$$= (2, 1, -1, 0, 1) - \frac{3}{3}(1, 0, -1, 1, 0) = (1, 1, 0, -1, 1) \ .$$

La base ortogonale che abbiamo trovato è pertanto

$$\{(1, 0, -1, 1, 0), (1, 1, 0, -1, 1)\} \ .$$