FOGLIO 4

Soluzioni

$\odot$ Calcolare il numero di sottomatrici 3×3 presenti in una matrice 3×5 (selezionare 3 palline in un insieme di 5 palline colorate in modo diverso... le palline rappresentano le colonne).

[10] Utilizziamo il "coefficiente binomiale" $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}$.

$\odot$ Fissata una sottomatrice 2×2 in una matrice 4×4, calcolare il numero di orli 3×3.

[4] Dobbiamo aggiungere una riga (tra le due disponibili) e una colonna (idem), quindi in $2 \cdot 2$ modi.

$\odot$ Calcolare il determinante del seguente prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{42} & 1 \\ 2 & 5^{-42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 8 \\ 0 & 2\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

[98] Il teorema di Binet facilita notevolmente i calcoli, grazie alla semplice moltiplicazione $7 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 14$.

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(2, 3)$ (riga 2, colonna 3) della matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

(per sicurezza, io calcolerei *tutta* l'inversa, farei il test del prodotto e infine preleverei il numero richiesto...)

[1]

$$(\text{ inversa } = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix})$$

$\odot$ Determinare k, numero reale, in modo che la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

abbia il determinante uguale a -20.

[$\frac{1}{40}$] Per il teorema di Binet, il determinante dell'inversa è l'inverso del determinante, quindi abbiamo: $-2k = -\frac{1}{20}$.

$\odot$ Il rango calcolato con i "minori" (determinanti di opportune sottomatrici) può essere maggiore del rango per righe (numero massimo di righe linearmente indipendenti), in una fissata matrice. [F]

$\odot$ Se tutti i numeri di una matrice quadrata 3×3 vengono moltiplicati per 10, il determinante subisce la moltiplicazione per 1000. [V]

$\odot$ Le matrici *non* invertibili 3×3 costituiscono un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le matrici 3×3. [F]

(sommandone due, non è detto che troviamo ancora una matrice con determinante nullo, provare...)

$\odot$ Se esiste una matrice inversa (data una matrice quadrata), tale inversa è unica. [V]

(con due inverse B, C della matrice A avremmo $B = B(AC) = (BA)C = C$, grazie all'associatività — non *commutatività*! — del prodotto.)

$\odot$ L'inversa del prodotto di matrici invertibili AB è uguale a $B^{-1}A^{-1}$. [V]

Infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

Esercizio 1.

Utilizzando un'opportuna riduzione a gradini, o almeno arrivando ad ottenere righe con molti zeri anche senza ridurre completamente a gradini, calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} .$$

(per conferma, se resta tempo e l'entusiasmo non scema... ricalcolare il determinante sviluppandolo direttamente ad es. lungo la terza riga, possibilmente divisa per 2 ma senza altre operazioni elementari del metodo di Gauss.)

Sol. Effettuiamo, ad esempio, le seguenti operazioni elementari:

$$\underline{r}_5 \to \underline{r}_5 - \underline{r}_4 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{array}{l} \underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - 2\underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 2\underline{r}_1 \\ \underline{r}_4 \to \underline{r}_4 - \underline{r}_1 \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il nuovo determinante non viene alterato da tali operazioni perché i coefficienti α valgono sempre 1. Ora che le acque sono meno agitate sviluppiamo il determinante lungo la quinta riga ottenendo

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} .$$

A questo punto possiamo considerare la prima colonna, ottenendo

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 .$$

Notiamo che al termine delle quattro operazioni elementari abbiamo creato una matrice "quasi" triangolare, con un "blocco" 3×3 al centro; successivamente abbiamo moltiplicato i due elementi sulla diagonale (i due 1) per il determinante del blocco, pensato come ulteriore elemento sulla diagonale. La divisione in blocchi consente di effettuare calcoli più veloci sulle matrici.

Esercizio 2.

(I) Risolvere il seguente sistema $A\underline{X}^t = \underline{b}^t$ applicando la tecnica della matrice inversa (metodo di Cramer originale), moltiplicando dunque a sinistra sia la matrice incompleta A che la colonna dei termini noti $\underline{b}^t$ per l'inversa della matrice incompleta, A^{-1} :

$$\begin{cases} x + y + 5z = 10 \\ x + 2z = 5 \\ x - 2y - 7z = -8 \end{cases}$$

(notare che la matrice incompleta è già presente in questo Foglio 4...).

(II) Scrivere opinioni personali sulle prestazioni di un metodo rispetto a un altro: 1) riduzione a gradini, 2) sostituzione, 3) Cramer originale (il metodo presente), 4) Cramer con "collage". Quale risulta più indicato ed efficiente, o più gradevole, in questo esercizio? Era preferibile un metodo diverso da "Cramer" originale?

Sol. Avendo già a disposizione la matrice inversa possiamo mettere in luce con estrema semplicità le tre incognite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3 \ , \ y = 2 \ , \ z = 1 \ .$$

Naturalmente possiamo scrivere l'inversa con i numeri completamente dentro alle parentesi, come

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \ .$$