FOGLIO 4, soluzioni

♢ Il rango della matrice completa di un sistema può superare di 2 il rango dell'incompleta. [F]
Viene aggiunta soltanto una colonna, quindi il rango non può salire più di 1.

♢ Un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite rappresenta l'intersezione di 3 rette nello spazio. [F]
3 PIANI !!!

♢ Un piano nello spazio può essere definito da un sistema lineare di 3 equazioni. [V]
Se sono tutte proporzionali.

♢ Due piani paralleli hanno la stessa giacitura. [V]

♢ Per tre punti allineati passa un unico piano. [F]
Ne passano infiniti (un fascio proprio).

▽ Determinare $a \in \mathbf{R}$ in modo che il piano di equazione $3x + ay - 3z - 1 = 0$ sia parallelo al vettore $(2, 7, 3)$.
[$\frac{3}{7}$]

▽ Determinare $\sigma \in \mathbf{R}$ ("sigma" in greco) in modo che il sistema

$$\begin{cases} x + \sigma y + \sigma z = 0 \\ 3x - y - z = 8 \end{cases}$$

non rappresenti una retta nello spazio.
[$-\frac{1}{3}$]

▽ Determinare il minimo numero di equazioni lineari in 3 incognite che occorrono per definire un punto nello spazio mediante un sistema. [3]

▽ Determinare il massimo numero di colonne linearmente indipendenti in una matrice 5×9 che ha le prime 4 righe linearmente indipendenti e l'ultima riga formata da tutti zeri.
[4] Il rango è anche il massimo numero di RIGHE linearmente indipendenti.

▽ Determinare $\varphi \in \mathbf{R}$ ("fi" in greco) in modo che non siano sghembe le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x + \varphi y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \quad , \quad \hat{r} : \begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad .$$

[$-\frac{5}{2}$]

Il determinante della matrice completa deve annullarsi.

Esercizio A.

Tra i piani contenenti la retta $r : x - y = y - z - 1 = 0$ determinare quello parallelo alla retta $s : x + 4z - 2 = y - 3 = 0$.

Successivamente stabilire se r è incidente alla retta s definita dalle equazioni parametriche $x = 3t$, $y = t - 4$, $z = t$.

Sol. Impostiamo il fascio di piani

$$h(x - y) + k(y - z - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; hx - hy + ky - kz - k = 0 \;\Leftrightarrow\; hx + (k - h)y - kz - k = 0$$

e ora imponiamo che sia nullo il determinante

$$r : \begin{vmatrix} h & k - h & -k \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4h + k \; ,$$

trovando così $k = -4h$ e in particolare $k = -4$, avendo posto ad es. $h = 1$. Il piano richiesto è quindi definito dall'equazione

$$x - 5y + 4z + 4 = 0 \ .$$

Osservazione. Non occorre affatto controllare che il rango della matrice completa resti uguale a 3. Infatti l'ideatore del testo è sicuro che un tale piano esiste, quindi non dobbiamo dubitare nemmeno per mezzo secondo che il rango scenda a 2! Fidiamoci di chi ha scritto il testo. Se però vogliamo essere davvero certi che l'ideatore non abbia sbagliato (può succedere, lo sappiamo...) allora mediante il teorema degli orlati è sufficiente assicurarsi che non sia nullo l'orlo costituito dalle colonne 2, 3, 4 della matrice completa $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, partendo quindi dalla sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Otteniamo:

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 60 - 24 = 36 \neq 0 \ .$$

(Quest'ultimo approfondimento non è richiesto in un ordinario esercizio d'esame, a meno che non sia specificata la richiesta.)

Per rispondere alla domanda finale è sufficiente sostituire le componenti di s nelle equazioni di r al fine di stabilire se esiste, ed è unico, il valore di t che realizza l'intersezione. Vediamo:

$(3t) - (t - 4) = 0$, quindi la prima equazione è soddisfatta per $t = -2$. Tuttavia, la seconda equazione è $(t - 4) - (t) - 1 = 0$ e non è soddisfatta da alcun valore di t (in particolare, $t = -2$ non va bene). Le rette non sono quindi incidenti (sono in effetti sghembe perché i loro vettori direttori...).

(Domanda: come possiamo interpretare geometricamente la mancata risolubilità della seconda equazione per ogni valore di t? Il relativo piano è infatti...)

Esercizio B.

Spiegare perché il sistema — anzi gli infiniti sistemi al variare di γ —

$$\begin{cases} x + 2y - \pi z + \sqrt{7} = 0 \\ \gamma x - \gamma y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \quad , \quad \gamma \in \mathbf{R}$$

rappresentano un fascio di rette, proprio, nello spazio. Determinarne quindi il centro.

Sol. Si tratta di un fascio di piani, proprio, che intercetta un piano fisso originando quindi un fascio di infinite rette. Per trovarne il centro C estrapoliamo l'asse del fascio,

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z - 8 = 0 \end{cases} \quad ,$$

e poi formiamo l'intersezione col piano fisso. Otteniamo

$$x = y \ , \ z = 4 \ \Rightarrow \ x + 2x - 4\pi + \sqrt{7} = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{4\pi - \sqrt{7}}{3} \ .$$

Arriviamo così al punto

$$C = \left(\frac{4\pi - \sqrt{7}}{3} , \frac{4\pi - \sqrt{7}}{3} , 4 \right) \ .$$