FOGLIO 6

Soluzioni

⊙ In un riferimento Oxy calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dall'asse y con la retta $r : 3x + 8y - \pi^5 = 0$.

[$\frac{3}{\sqrt{73}}$] Applichiamo la formula a due vettori idonei, correggendo il segno eventuale negativo mediante il valore assoluto (così da evitare il coseno negativo, relativo all'angolo supplementare):

$$\cos\theta = \frac{|(0,1) \times (8,-3)|}{1 \cdot \sqrt{73}} = \frac{3}{\sqrt{73}} \ .$$

⊙ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che il vettore $\vec{v} = (k, 2, 3)$ sia perpendicolare alla retta $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$.

[$-\frac{7}{2}$] Un vettore direttore di r è $(2, 2, 1)$ (soluzione del sistema omogeneo, facile, ad es. con tentativi di sostituzione elementari, $x = y = 2$ ecc.). Poi imponiamo che $(k, 2, 3) \times (2, 2, 1)$ sia nullo.

⊙ Calcolare la distanza tra le rette (parallele) $r : x - y = y - z = 0$ e $s : x - 2y + z = x - z + 1 = 0$.

[$\frac{1}{\sqrt{2}}$] Una volta trovata la direzione di r (e di s) grazie al vettore direttore $(1, 1, 1)$, opportunamente calcolato, quest'ultimo diventa il vettore normale ("chiodo") di un piano che taglierà perpendicolarmente le due rette. Possiamo scegliere per comodità il piano di equazione $x + y + z = 0$ tra gli infiniti piani del fascio improprio. Il sistema con r e successivamente con s dà i due rispettivi punti d'intersezione $(0, 0, 0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Infine calcoliamo la distanza tra questi due punti.

⊙ Calcolare la minima distanza tra le rette (sghembe) $r : [\textit{asse } y]$ e $s : x - 2 = y + z - 2 = 0$.

[2] Fissiamo intanto il "terreno" (piano ad es. contenente l'asse y e parallelo a r: è infatti una delle due possibilità): partendo dal fascio di equazione $x + kz = 0$ (escludiamo con un piccolo rischio il piano di equazione $z = 0$ ...) imponiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k = 0 \ .$$

Bene: si tratta del piano di equazione $x = 0$. Ora calcoliamo la distanza punto-piano, dopo aver prelevato un punto $P \in s$ con semplici deduzioni: intanto abbiamo $x = 2$, poi ad es. $y = z = 1$, quindi otteniamo $P = (2, 1, 1)$. (Attenzione: anzichè utilizzare ora la formula per la distanza punto-piano, potremmo ottenere subito 2 con considerazioni geometriche elementari.)

⊙ Determinare i due valori di $h \in \mathbf{R}$ tali che il piano $\pi : hx + y + 5z - 3 = 0$ formi un angolo di 60° col piano xy.

[$\pm\sqrt{74}$] Applichiamo la formula ai due vettori normali:

$$\frac{|(h, 1, 5) \times (0, 0, 1)|}{\sqrt{h^2 + 1 + 25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ 10 = \sqrt{h^2 + 26} \ ...$$

⊙ Il prodotto scalare tra due versori dello spazio può essere negativo. [V]
(in caso di angolo ottuso)

⊙ Due rette sghembe ammettono un piano perpendicolare a entrambe. [F]
(altrimenti avrebbero la medesima direzione e sarebbero quindi parallele o coincidenti)

⊙ Nello spazio $Oxyz$, se una retta r è perpendicolare (e incidente) a una retta s che a sua volta è perpendicolare a una retta t e incidente nello stesso punto, allora r coincide con t. [F]
(le rette potrebbero essere semplicemente incidenti; invece sarebbero coincidenti nel modello della geometria piana, Oxy)

⊙ Un sistema lineare omogeneo può essere interpretato come un insieme di condizioni di perpendicolarità. [V] (ogni equazione $v_1x_1 + \ldots = 0$ esprime l'annullamento di un prodotto scalare $\underline{v} \times \underline{X}$)

$\odot$ Tre vettori dello spazio, non nulli e a due a due ortogonali, sono linearmente indipendenti. [V]

Se avessimo $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ allora sottoponendo i due membri al prodotto scalare ad es. con $\underline{v}_1$ troveremmo

$$\underline{v}_1 \times (a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3) = \underline{v}_1 \times \underline{0} = 0$$

e d'altra parte (come se avessimo un filtro colorato che evidenzia soltanto alcune frequenze luminose, o come un filtro passa-banda per le frequenze di un suono)

$$\underline{v}_1 \times (a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3) = \underline{v}_1 \times a_1\underline{v}_1 + \underline{v}_1 \times a_2\underline{v}_2 + \underline{v}_1 \times a_3\underline{v}_3 = a_1\underline{v}_1 \times \underline{v}_1 \ .$$

Ora, poiché $\underline{v}_1 \times \underline{v}_1 \neq 0$ otterremmo che a_1 vale 0.

Con un ragionamento analogo per gli altri due coefficienti arriviamo ad aver dimostrato l'indipendenza lineare.

Esercizio.

Tra i piani contenenti la retta $r : 3x + 6y + 4z - 1 = x + 2y + z - 4 = 0$, determinare (con un'equazione cartesiana) quello perpendicolare all'asse z.

Nello stesso insieme di piani, determinare anche quello perpendicolare al piano $\pi : x-4y+5z-8 = 0$.

Sol. Una volta "messo in moto" il fascio di piani

$$\lambda(3x + 6y + 4z - 1) + \mu(x + 2y + z - 4) = 0$$

e riorganizzati i monomi in

$$(3\lambda + \mu)x + (6\lambda + 2\mu)y + (4\lambda + \mu)z - \lambda - 4\mu = 0 \ ,$$

dobbiamo imporre che il vettore normale variabile, nel fascio, sia proporzionale al vettore $(0, 0, 1)$. Possiamo permetterci di imporre in effetti che sia perfino uguale, non solo proporzionale, visto che disponiamo di due parametri λ, μ che si adeguano alla richiesta (con un solo parametro, k avremmo dovuto limitarci alla semplice proporzionalità, con leggere difficoltà in più, nei calcoli). Abbiamo quindi:

$$3\lambda + \mu = 0 \quad \wedge \quad 6\lambda + 2\mu = 0 \quad \wedge \quad 4\lambda + \mu = 1 \ .$$

La seconda condizione è superflua, e deve esserlo! Questo non era affatto scontato: se il testo non è scritto correttamente, potrebbe non esistere alcuna soluzione (infatti cosa accadrebbe geometricamente in tal caso?).

Otteniamo ora $\mu = -3\lambda$ e infine $\lambda = 1$, $\mu = -3$. Il piano richiesto è quindi definito dalla legge

$$z + 11 = 0 \ .$$

Nota. Ora che abbiamo scoperto l'equazione, forse con un po' di rammarico potremmo realizzare che sin dall'inizio era lecito e più agevole immaginare la soluzione come un piano del tipo $z + \omega = 0$ (fascio di piani improprio, con asse z perpendicolare) per poi imporre l'annullamento di

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

che coinvolge il secondo orlo della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -1 \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & -4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \omega \end{pmatrix}$$

di cui stiamo imponendo l'abbassamento del rango a 2 (l'altro minore è nullo). Otteniamo quindi

$$22 - 2\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 11 \ ,$$

ma va benissimo anche il metodo precedente (o qualunque altro metodo purché rigoroso).

Il secondo problema richiede invece il confronto dei due vettori normali mediante il prodotto scalare che deve essere posto uguale a zero:

$$(3\lambda + \mu) \cdot 1 + (6\lambda + 2\mu)(-4) + (4\lambda + \mu) \cdot 5 = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda - 2\mu = 0 \;\Rightarrow\; \mu = -1\,,\, \lambda = 2$$

(ad esempio abbiamo posto $\mu = -1$ per ottenere un λ confortevole). L'equazione finale è quindi

$$5x + 10y + 7z + 2 = 0$$

(non dimentichiamo di ripristinare il termine noto alla fine; esso si è fatto da parte per consentirci il calcolo del prodotto scalare, ma alla fine deve tornare in vigore!).