FOGLIO 6, soluzioni

♢ Il vettore $(0,0,0,0)$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbf{R}^4$. [V]
$\underline{0} \times \underline{v} = 0 \ \forall \underline{v}$.

♢ Il sottospazio ortogonale a un sottospazio di dimensione 1, in $\mathbf{R}^4$, ha dimensione 3. [V]
Grassmann: $1 + \delta - 0 = 4$.

♢ La somma di due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbf{R}^4$ può avere dimensione maggiore di 4. [F]
La somma è comunque un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.

♢ Il prodotto vettoriale di due vettori perpendicolari di lunghezza 5 è il numero reale 25. [F]
Il prodotto vettoriale è un vettore!

▽ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che il sottospazio S di equazioni $4x_1 - x_2 + kx_3 - 2x_4 + 6x_5 + x_6 = x_3 - x_4 = 0$ e il sottospazio $T = \langle (1,1,1,1,1,1), (1,2,0,1,1,1) \rangle$ diano come somma un sottospazio più piccolo di $\mathbf{R}^6$. [-8] S ha dimensione 4, quindi secondo Grassmann occorre fare in modo che $S \cap T$ abbia dimensione maggiore di 0. Poiché il secondo generatore di T non soddisfa le equazioni di S (dovrebbe soddisfarle entrambe), imponiamo che il primo invece le soddisfi.

▽ Calcolare la dimensione dell'intersezione di due sottospazi di dimensione 6 la cui somma copre tutto lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 9. [2] Grassmann: $6+6-\delta = 10$ (la dimensione di questo spazio di polinomi infatti vale 10...).

▽ Determinare il numero positivo c in modo che il punto (c,c,c) formi con l'origine e col punto $(4,3,\sqrt{2})$ un triangolo di area $10\sqrt{30-14\sqrt{2}}$. [20]

Il modulo del prodotto vettoriale $(c-0, c-0, c-0) \wedge (4-0, 3-0, \sqrt{2}-0)$ deve risultare uguale a $20\sqrt{30-14\sqrt{2}}$, quindi $c||(\sqrt{2}-3, -\sqrt{2}+4, -3+4)|| = 20\sqrt{30-14\sqrt{2}}$ ecc.

▽ Calcolare la terza coordinata di $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \pi^2, -3^{87}, \pi^{\sqrt{7}})$ rispetto alla base *ortogonale* di $\mathbf{R}^6$

$$\{(1,1,0,0,0,0), (1,-1,0,0,0,0), (0,0,\sqrt{2},\sqrt{2},0,0), (0,0,\sqrt{7},-\sqrt{7},0,0), (0,0,0,0,\pi^2,-\pi^2), (0,0,0,0,4,4)\} .$$

[$\frac{\sqrt{2}(\pi+\pi^2)}{4}$]
(terzo coefficiente di Fourier)

▽ In $\mathbf{R}^5$, calcolare la dimensione del sottospazio ortogonale al sottospazio

$$\langle (1,1,1,1,0), (1,2,3,4,0), (4,3,2,1,0), (5,4,3,2,0) \rangle .$$

[3] Due generatori sono superflui, ne restano due e quindi $5 - 2 = 3$.

Esercizio A.
Dopo aver eliminato un vettore superfluo nell'insieme di generatori

$$\{(1,1,0,0), (2,-2,1,1), (1,1,1,1), (2,2,1,1)\} ,$$

calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ nel sottospazio generato da tali vettori.
Cosa accade al termine del calcolo della base ortogonale mediante "Gram-Schmidt", se non si elimina preventivamente il vettore superfluo e si considerano quindi tutti i 4 vettori?

Sol. Il quarto vettore è chiaramente generato dal primo e terzo; invece, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha un minore 3×3 diverso da zero (il determinante relativo alle prime tre colonne vale -4), quindi le tre righe sono essenziali. Notiamo che i primi due vettori sono già ortogonali, quindi è sufficiente una ortogonalizzazione di Gram-Schmidt del secondo livello, adeguando il terzo vettore ai primi due. Il nuovo vettore sarà

$$(1,1,1,1) - \frac{2}{2}(1,1,0,0) - \frac{2}{10}(2,-2,1,1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

ed è consigliabile sostituirlo con un multiplo adeguato, ad esempio $(-1,1,2,2)$.

Se dimentichiamo di eliminare il quarto vettore ma siamo bravi con i calcoli, dopo aver effettuato un'ortogonalizzazione del *terzo* livello su $(2,2,1,1)$ — sottraendo quindi tre vettori — noteremo che il nuovo vettore verrà $(0,0,0,0)$. Infatti il quarto vettore si rifiuta di contribuire alla base ortogonale e si autodistrugge... Soltanto così la dimensione resterà 3 senza salire a 4.

Torniamo all'esercizio. Occorre ora proiettare il vettore dato. Abbiamo:

$$\underline{p} = \frac{0}{2}(1,1,0,0) + \frac{1}{10}(2,-2,1,1) + \frac{2}{10}(-1,1,2,2) = \left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) .$$

Come prova della correttezza possiamo sottrarre $\underline{p}$ dal vettore dato, ottenendo

$$\left(0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

che risulta ortogonale ai tre vettori della base e quindi a qualunque vettore che sia loro combinazione (tutti i vettori del sottospazio generato — esercizio).

Esercizio B.

Calcolare tre autovettori, linearmente indipendenti, relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui legge è $f(x,y,z) = (0, y+z, 3y+3z)$.

Sol. Costruiamo l'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = 0 .$$

(attenzione, non conviene arrivare al polinomio di grado 3 perché perderemmo la decomposizione evidentissima!)

Otteniamo due autovalori (0, 4) e quindi non siamo sicuri che esista una base di tre autovettori. L'autovalore 0 ha una grossa responsabilità, dovendo generare un autospazio di dimensione 2. Riuscirà, questo autovalore, a far crollare il rango a 1?

Il sistema relativo all'autovalore 0 è in effetti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il rango è sceso a 1, anzi è *rimasto uguale* a 1, poiché l'autovalore 0 non altera la matrice iniziale che appunto era nata di rango 1. La ricerca della soluzione parametrica è comunque delicata e porta all'autospazio $\{(\delta, \gamma, -\gamma)\}$ che possiamo vedere come il sottospazio $\langle (1,0,0), (0,1,-1) \rangle$. Sappiamo che si tratta in realtà del nucleo di f.

Ben diversa è la situazione per l'altro autovalore. Esso si intrufola nell'esercizio proclamandosi meritevole, come il precedente autovalore, anche se questo secondo autovalore abbassa il rango soltanto a 2 (in realtà *lo fa salire soltanto* a 2, anziché a 3 come tutti gli altri numeri reali non nulli). Esso dà luogo a un secondo autospazio, questa volta uno-dimensionale (ricordiamo che per un noto teorema — non dimostrato durante il corso — la m.g. non supera mai la m.a.).

Il sistema relativo all'autovalore 4 è, nel dettaglio,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

con soluzione $(0, \gamma, 3\gamma)$.

Un vettore che non appartiene all'immagine è esterno a tale sottospazio; quest'ultimo è generato dalle colonne della matrice (rispetto alla base canonica). La dimensione dell'immagine vale 1 ed è quindi sufficiente esibire un vettore che non sia proporzionale a $(0, 1, 3)$ — ad esempio $(1, 0, 0)$. Un vettore come questo aumenta il rango della matrice completa del sistema che creiamo per la ricerca della controimmagine, impedendo la risolubilità del sistema stesso.