FOGLIO 7

Soluzioni

$\odot$ Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono i punti $(2,3,5)$, $(1,0,-2)$, $(2,2,2)$. [$\frac{\sqrt{14}}{2}$]
Tramite il prodotto vettoriale $(1,3,7) \wedge (0,1,3) = (2,-3,1)$:

$$\text{area} \;=\; \frac{\sqrt{4+9+1}}{2} \; .$$

$\odot$ Calcolare l'immagine del vettore $(2,3,2,3)$ relativamente all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^1$ definita dalla matrice $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. [-18]
È sufficiente effettuare il prodotto

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; .$$

$\odot$ Calcolare la controimmagine del vettore $(9,8)$ relativamente all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$ di cui è noto che $f(1) = (27,24)$. [$\frac{1}{3}$]
Questa funzione può essere infatti descritta mediante la legge $f(x) = (27x, 24x)$, oppure possiamo applicare la linearità notando che $(9,8)$ è uguale a un terzo dell'immagine di 1.

$\odot$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che l'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla matrice (rispetto alle basi canoniche) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non copra tutto il codominio. [-2]
L'annullamento del determinante abbassa il rango e quindi perdiamo l'uguaglianza con la dimensione del codominio.

$\odot$ Determinare $s \in \mathbf{R}$ in modo che $(s,5,6)$ sia un autovettore per l'applicazione lineare definita dalla matrice (rispetto alle basi canoniche) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 \\ 8 & 12 & 2 \end{pmatrix}$. [0]

Abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 \\ 8 & 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6s \\ s+60 \\ 8s+72 \end{pmatrix} \; .$$

Se $s \neq 0$ la prima componente forza un eventuale autovalore ad essere uguale a 6; ora avremmo $6 \cdot 5 = s + 60$, quindi $s = -30$, ma questo confligge con la condizione $6 \cdot 6 = 8s + 72$. Invece $s = 0$ è compatibile (con autovalore 12).
In alternativa possiamo trovare gli autovettori, partendo dall'equazione caratteristica

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 6\lambda - 360 = 0 \; .$$

Mediante il metodo di Ruffini possiamo vagliare i divisori di 360 finché non troviamo 12, idoneo. Il polinomio viene così decomposto in $(\lambda - 12)(\lambda^2 + 3\lambda + 30)$, quindi abbiamo soltanto un autovalore reale, con rispettivo autovettore $(0,5,6)$.

$\odot$ La funzione che porta tutti i vettori di $\mathbf{R}^4$ in $(0,1,0,0)$ è lineare. [F]
Il vettore nullo deve essere sempre portato nel vettore nullo.

$\odot$ La funzione che porta i vettori di $\mathbf{R}^4$ nei loro opposti è lineare. [V]
(ad es. perché $f(x,y,w,z) = (-x,-y,-w,-z)$ ammette la matrice $(-1 \; -1 \; -1 \; -1)$.)

$\odot$ Nello spazio vettoriale dei vettori tridimensionali applicati nell'origine, la funzione che porta un vettore nel suo normalizzato è lineare. [F]

Ad esempio, $f(\mathbf{i}) + f(\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \mathbf{i}$ ma anche $f(\mathbf{i} + \mathbf{i}) = f(2\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(2\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, contro la linearità.

$\odot$ Per la funzione identità, da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$, tutti i vettori (s, t, u, v) non nulli sono autovettori. [V]
Il relativo autovalore è 1 per tutti i vettori del dominio non nulli.

$\odot$ Può accadere che un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^1$ a $\mathbf{R}^9$ non sia iniettiva. [V]
L'unico caso, comunque ammesso, è $f(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ — collasso dell'asse reale nell'origine del codominio di dimensione 9).

Esercizio 1. Calcolare autovettori linearmente indipendenti — il massimo numero possibile — per la funzione

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4 \ : \ f(x, y, w, z) = (2x + 7y + 3w + 4z, 2y + 5w - 3z, 2w + 8z, 3z) \ .$$

(attenzione, non ci sono molti autovalori... ma per uno di questi, i calcoli per l'autovettore esplodono! Pazienza, l'autovettore verrà un po' ingombrante.)

Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f. (Questa domanda non riguarda gli autovettori, è indipendente)

Sol. La ricerca degli autovalori conduce al seguente calcolo:

$$\begin{vmatrix} 2-s & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 2-s & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2-s & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3-s \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ (2-s)^3(3-s) = 0 \ \Rightarrow \ s = 2 \ , \ s = 3 \ .$$

Sostituendo l'autovalore $s = 2$ e risolvendo il relativo sistema, abbiamo intanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

La matrice incompleta e la completa di questo sistema omogeneo hanno rango 3, quindi troveremo soluzioni con un solo parametro (∞^{4-3} soluzioni). In questo esercizio particolare, abbiamo la soluzione $(0, 0, 0, t)$, quindi un autovettore è ad esempio $(0, 0, 0, 1)$. È emerso, quindi, che la molteplicità geometrica 1 non sta affatto al passo della molteplicità algebrica 3.

Sostituendo poi l'autovalore $s = 3$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Il rango vale di nuovo 3, ma questo era prevedibile perché la molteplicità geometrica di $s = 3$ non poteva superare quella algebrica, 1. Avremo soluzioni con un solo parametro ma ce lo aspettavamo, a differenza del caso precedente. Otteniamo la soluzione $(287t, 37t, 8t, t)$.

Non esistono coppie di vettori che vengono portate nello stesso vettore, dato che il rango della matrice iniziale vale 4 come la dimensione del dominio — sussiste quindi l'iniettività.

Esercizio 2. (*esercizio un po' fuori dagli schemi... Ma è un'ottima occasione per approfondire questi concetti!*) Sia U lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e sia $g : U \to U$ l'endomorfismo (applicazione lineare tra spazi vettoriali uguali) che porta il generico polinomio $\varphi(x) \in U$ nella sua derivata $\frac{d\varphi}{dx}$.

A) g è suriettivo?

B) g è iniettivo?

C) Esistono polinomi (non nulli) che sono *autovettori* relativi a g?

Le risposte devono essere sempre giustificate.

Sol. A) La derivata non riesce a produrre polinomi di grado 3 perché il polinomio da derivare dovrebbe avere, nel dominio, grado 4, quindi la suriettività non vale; esistono quindi polinomi (nel codominio) sprovvisti di controimmagine, almeno se siamo confinati all'interno del dominio U, come ipotizza il testo dell'esercizio.

B) Due polinomi che differiscano solo per il termine noto hanno la stessa derivata, quindi non vale l'iniettività.

C) La derivata abbassa il grado di 1, quindi non è possibile che $\frac{d\varphi}{dx} = k\varphi$ a meno che il polinomio da derivare non sia *costante*. I polinomi c, con $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, sono tutti e soli gli autovettori, con autovalore $k = 0$.