FOGLIO 3

Soluzioni

$\odot$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che la matrice triangolare superiore 5×5 contenente tutti h nei posti (i, j), con $i \leq j$, abbia determinante $-4\sqrt{2}$.

$[-\sqrt{2}]$ (il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale, proprietà notevole, di facile dimostrazione; quindi abbiamo $h^5 = -4\sqrt{2}$ ecc.)

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^{30}$ costituito da vettori palindromi (vettori che hanno la stessa sequenza di lettura sia da sinistra che da destra). [15] (una base è formata dai vettori aventi tutti zeri con l'eccezione di due 1 nel posto i e nel posto $30 - i + 1$, posti quindi "simmetrici")

$\odot$ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici diagonali 8×8. [8]

$\odot$ Calcolare il determinante $|A|$ della matrice 3×3 $A = (a_{ij})$ tale che $a_{ij} = i + j - 2$ $\forall i, j$. [0]

$\odot$ Dati due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ non proporzionali in uno spazio vettoriale assegnato, determinare la dimensione del sottospazio

$$\langle \underline{u}\,,\ \underline{u} + \underline{v}\,,\ \underline{v}\,,\ \underline{u} + 2v\,,\ \underline{3}u - 7\underline{v} \rangle \ .$$

[2] (tre dei cinque vettori sono generati da $\underline{u}$ e $\underline{v}$)

$\odot$ In uno spazio vettoriale di dimensione 5 possono esistere 6 generatori. [V]
(Non saranno certo linearmente indipendenti, pazienza.)

$\odot$ Uno spazio vettoriale di dimensione 5 contiene esattamente 5 vettori. [F]
Ne contiene infiniti, in effetti ∞^5. Una sua base contiene invece 5 vettori, precisamente, proprio come elementi di un insieme.

$\odot$ La riduzione a gradini non altera il valore del determinante. [F]
Gli eventuali fattori $\alpha \neq 1$ di trasformazione della riga stessa ($\underline{r}_i \to \alpha \underline{r}_i + \beta \underline{r}_j$) perturbano il determinante originale.

$\odot$ Il sottospazio $\{(x, y, w, z) \in \mathbf{R}^4 \colon x - y = 3y - 3x = y - w - z = 0\}$ ha dimensione 2. [V]
Si tratta dei vettori della forma $(s, s, t, s - t)$ ecc. (metodo 1-0 ...)

$\odot$ L'insieme $\{(a + b + c, a + b, a + b, 0, 0, 0, 1, 0) \colon a, b, c \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^8$. [F]
Non contiene lo zero, ad esempio.

Esercizio 1.

Dimostrare che non esiste alcun valore del numero reale P per cui il sottospazio

$$W = \{(x, y, w, z) \in \mathbf{R}^4 \colon Px + y + Pw = x + 2w + Pz = (P + 2)x + y + (P + 4)w + 2Pz = 0\}$$

abbia dimensione 1 e che in effetti la dimensione vale sempre 2.

Sol. Dobbiamo controllare che la matrice incompleta del sistema abbia rango 2 per ogni valore di P, in modo tale che la differenza tra il numero di incognite e il rango valga $4 - 2 = 2$. Se invece il rango restasse uguale a 3 per certi valori, in quei casi la dimensione scenderebbe a $4 - 3 = 1$.

Operando con $\underline{r}_2 \to P\underline{r}_2 - \underline{r}_1$ e $\underline{r}_3 \to P\underline{r}_3 - (P + 2)\underline{r}_1$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} P & 1 & P & 0 \\ 1 & 0 & 2 & P \\ P + 2 & 1 & P + 4 & 2P \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P & 1 & P & 0 \\ 0 & -1 & P & P^2 \\ 0 & -2 & 2P & 2P^2 \end{pmatrix}$$

e ora con $\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 2\underline{r}_2$ creiamo tutti zeri nell'ultima riga. Attenzione, però: affinché le prime due operazioni siano lecite occorre escludere il caso $P = 0$; questa evenienza deve essere gestita separatamente, analizzando la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Potremmo effettuare una nuova riduzione a gradini, scambiando inizialmente le prime due righe, oppure possiamo notare che $\underline{r}_3 = \underline{r}_1 + 2\underline{r}_2$. In effetti, a ben vedere, avremmo potuto notare questa interessante relazione sin dall'inizio, per ogni valore di P!

Esercizio 2.
Dimostrare, con passaggi logici rigorosi, che in uno spazio vettoriale, a differenza dei sistemi solari con due soli... non possono esistere due vettori nulli distinti. Se per assurdo esistessero...

Sol. È sufficiente mostrare un'identità mirata: se esistessero due elementi neutri distinti, $\underline{0}$ e $\underline{0}'$, allora avremmo una contraddizione perché

$$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}' .$$

Esercizio 3.
Calcolare (con passaggi espliciti) il determinante

$$\begin{vmatrix} \sqrt{72} & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -3 \\ 5 & \sqrt{8} & \sqrt{2} \end{vmatrix} .$$

(*sugg.* scegliere una riga o colonna comoda...)

Sol. Sviluppiamo il determinante lungo la seconda riga, ottenendo

$$-\sqrt{2}(2\sqrt{2} - \sqrt{8}) + 3(\sqrt{576} - 10) = 0 + 42 = 42 .$$