FOGLIO 3, soluzioni

$\diamondsuit$ La matrice inversa del prodotto di matrici quadrate AB è la matrice $A^{-1}B^{-1}$ [F]
Il prodotto $(A^{-1}B^{-1})(AB)$ si inceppa, non valendo la commutatività.
Invece scambiando... $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = ...$

$\diamondsuit$ Una matrice diagonale 6×6 ha il rango uguale a 6. [F]
Non è detto che tutti i 6 numeri siano diversi da zero!

$\diamondsuit$ Se dimezziamo tutti i numeri di una matrice 4×4, il determinante viene diviso per 16. [V]
Ogni riga determina un dimezzamento e alla fine $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ del determinante iniziale.

$\diamondsuit$ Il determinante non è definito se la relativa matrice non è quadrata (cioè di tipo $n \times n$) [V]

$\diamondsuit$ La somma di due matrici 3×3 invertibili è una matrice invertibile. [F]
Basta ad es. sommare la matrice identità con la stessa matrice cambiata di segno.

$\diamondsuit$ Le matrici non invertibili 2×2 formano un sottospazio nello spazio vettoriale di tutte le matrici 2×2. [F]
Ad esempio manca la matrice nulla.

$\bigtriangledown$ Determinare il numero nel posto $(2, 3)$ della matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[$\frac{1}{4}$]

$\bigtriangledown$ Calcolare il determinante del seguente prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 8 \end{pmatrix}.$$

[-56π]
(teorema di Binet: prodotto dei 4 singoli determinanti)

$\bigtriangledown$ Calcolare il rango di una matrice 9×9 che contiene tutti 1 ad eccezione di cinque 0 agli angoli e al centro. [3] L'ultima riga è uguale alla prima; ci sono poi 6 righe uguali e quindi una genera le altre. Infine c'è la riga centrale. Riducendo a gradini abbiamo tre pivot, quindi le tre righe superstiti sono linearmente indipendenti.

$\bigtriangledown$ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abbia il determinante uguale a 3.
[$\frac{5}{3}$]
$2 - k = \frac{1}{3}$.

$\bigtriangledown$ Determinare il numero nel posto $(2, 2)$ della matrice

$$M^6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \pi \\ 0 & -2 & 9^{17} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^6,$$

(per esteso, la matrice è $M \cdot M \cdot M \cdot M \cdot M \cdot M$)
[64]

La diagonale delle matrici triangolari segue la legge elementare della potenza, mentre i tre numeri nei posti restanti diventano molto complicati!

Esercizio A.

Calcolare in due modi il seguente determinante (o moltiplicando le matrici prima, o calcolando i due determinanti e applicando il teorema di Binet).

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\pi & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right|$$

Sol. Il prodotto di matrici, se calcolato, è certamente un'ottima palestra. Abbiamo alla fine

$$\begin{vmatrix} 6 & 4-\pi & 6 \\ 0 & \pi & -11 \\ 9 & 6-4\pi & 40 \end{vmatrix} = 6(40\pi + 66 - 44\pi) + 9(-44 + 11\pi - 6\pi) = 21\pi \ .$$

Prendiamo invece il treno un po' più veloce di "Binet":

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-3+4) - 1(3) = -1 \ , \ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\pi & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -21\pi$$

(la seconda matrice è triangolare...) e concludiamo con un prodotto finale immediato.

Esercizio B.

Stabilire se esistono valori reali di t che rendono i vettori

$$(1, t-1, t^2, 2t) \ , \ (2t-1, 1, -t, t) \ , \ (2, 1, t-1, 3)$$

generatori di un sottospazio tridimensionale di $\mathbf{R}^4$ (in altri termini, devono essere linearmente indipendenti; è possibile utilizzare la riduzione a gradini o il rango per minori, oppure anche una combinazione lineare esplicita).

Sol. Operiamo una riduzione a gradini sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & t^2 & 2t \\ 2t-1 & 1 & -t & t \\ 2 & 1 & t-1 & 3 \end{pmatrix} \quad [\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - (2t-1)\underline{r}_1] \wedge [\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 2\underline{r}_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t^2 & 2t \\ 0 & -2t^2+3t & -2t^3+t^2-t & -4t^2+3t \\ 0 & -2t+3 & -2t^2+t-1 & -4t+3 \end{pmatrix} \quad [\underline{r}_3 \to t\underline{r}_3 - \underline{r}_2] \ (\text{se } t \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t^2 & 2t \\ 0 & -2t^2+3t & -2t^3+t^2-t & -4t^2+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Il terzo vettore è generato dai primi due (come approfondimento, per essere precisi riguardo alla dimensione occorrerebbe dimostrare che la seconda riga non si annulla mai completamente! Esercizio, esplicitare la t, ecc.). Nel caso escluso, quando $t = 0$, la seconda matrice ha una riga nulla e restano nuovamente due pivot dopo aver scambiato $\underline{r}_2$ con $\underline{r}_3$. In sintesi, la dimensione vale in ogni caso 2, quindi non esistono valori di t che soddisfano la richiesta.

Un approccio alternativo, più lento, è quello del rango per minori. Purtroppo non esistono minori di ordine 2 costanti — dipendono tutti da t. Scegliamo allora la sottomatrice formata dalle righe 2, 3 e dalle colonne 2, 4, Il suo determinante è uguale a $3 - t$, quindi possiamo supporre che non sia nullo una volta escluso il valore $t = 3$ che tratteremo successivamente. Per valori diversi da 3 calcoliamo quindi i determinanti dei due relativi orli:

$$\begin{vmatrix} 1 & t-1 & 2t \\ 2t-1 & 1 & t \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \ , \ \begin{vmatrix} t-1 & t^2 & 2t \\ 1 & -t & t \\ 1 & t-1 & 3 \end{vmatrix} \ .$$

Applicando la regola di Sarrus otteniamo rispettivamente

$$3 + 2t^2 - 2t + 4t^2 - 2t - 4t - t - 6t^2 + 6t + 3t - 3 = 0 \quad ,$$

$$-3t^2 + 3t + t^3 + 2t^2 - 2t + 2t^2 - t^3 + 2t^2 - t - 3t^2 = 0 \ .$$

In virtù del teorema degli orlati possiamo essere certi che anche gli altri due minori di ordine 3 valgono zero, quindi il rango della matrice 3×4 scende a 2 causando la dipendenza lineare delle tre righe. Infine, analizzando separatamente il caso $t = 3$ abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

La quarta colonna può essere trascurata ai fini del calcolo del rango perché è il triplo della seconda (utilizzando la nozione di rango per colonne). Resta da calcolare (questa volta ad es. col metodo di Laplace)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 16 + 9 \cdot 3 = 0 \ .$$

Ne deduciamo che anche in questo caso particolare il rango vale 2, pregiudicando l'indipendenza lineare.