FOGLIO 1 , soluzioni.

$\triangledown$ Determinare α in modo che sia nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & 5 \end{vmatrix} .$$

[$\frac{10}{3}$]

$\triangledown$ Determinare $t \in \mathbf{R}$ in modo che la retta di equazione $x + ty + 3 = 0$ sia parallela al vettore $(9, 1)$. [-9] (ad esempio, l'equazione della giacitura deve essere soddisfatta: $9 + t \cdot 1 = 0$)

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra le due rette parallele aventi rispettive equazioni $7x = 8$ e $x = 7$.

[$\frac{41}{7}$]

$\triangledown$ Determinare α in modo che la retta espressa in forma parametrica come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

passi per il punto $(9, 26)$. [5] $(2 + t = 9 \Rightarrow t = 7 \Rightarrow \alpha + 7 \cdot 3 = 26)$

$\triangledown$ Calcolare il modulo (o lunghezza) del vettore che ha come estremi i punti $(-1, -6)$ e $(-3, -2)$. [$\sqrt{20}$]

$\diamondsuit$ Due vettori tra loro perpendicolari possono avere tutte le loro (quattro) componenti negative. [F]
(essi, applicati ad es. nell'origine, non possono occupare il medesimo quadrante del piano Oxy)

$\diamondsuit$ I vettori direttori di due rette parallele sono proporzionali, anche se non uguali. [V]

$\diamondsuit$ La somma di due vettori di lunghezza $\frac{1}{2}$ può dare un versore. [V]
(tuttavia solo se i vettori sono uguali, altrimenti otteniamo un vettore più corto)

$\diamondsuit$ Due rette parallele sono definite da equazioni cartesiane proporzionali. [F]
(equazioni proporzionali definiscono la stessa retta!)

$\diamondsuit$ Il coefficiente angolare dell'asse y è l'opposto dell'inverso del coefficiente angolare dell'asse x. [F]
Non esiste, il coefficiente angolare dell'asse y; potremmo dire che esso vale ∞ ma si tratterebbe di un limite, poco utilizzabile a livello di calcolo anche se non del tutto inutile (se decidiamo di utilizzarlo entriamo nella cosiddetta *aritmetica non standard*, ma appunto nell'aritmetica usuale esso non esiste).

$\diamondsuit$ La somma di due versori può dare un nuovo versore. [V]
(provare con versori che formano un angolo di 120°)

Esercizio A.

È data la retta r di equazione $x + 6y - 3 = 0$. Utilizzando i vettori e il determinante, scrivere un'equazione della retta perpendicolare a r e passante per il punto $(10, 9)$. Stabilire se il vettore $\vec{v} = -6\mathbf{i} - \mathbf{j}$ è parallelo a r.

Sol. Un vettore ortogonale a r è $(a, b) = (1, 6)$, dove le lettere fanno riferimento all'equazione cartesiana generale $ax + by + c = 0$ (un vettore direttore è invece $(-b, a)$, come sappiamo); otteniamo quindi

$$\begin{vmatrix} x - 10 & y - 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6(x - 10) - 1(y - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - y - 51 = 0 \ .$$

Il vettore dato può essere scritto, in coordinate, come $(-6, -1)$ e non è proporzionale a $(-b, a) = (-6, 1)$, quindi non sussiste il parallelismo. In alternativa possiamo notare che $x = -6$ e $y = -1$ non risolvono l'equazione tronca della giacitura, $x + 6y = 0$, o infine possiamo notare che il coefficiente angolare di r vale $-\frac{1}{6}$ mentre nel caso di $\overrightarrow{v}$ il rapporto tra ordinata e ascissa vale $+\frac{1}{6}$.

Esercizio B.
Mediante un'opportuna *combinazione lineare*, dimostrare che la retta r_3 di equazione $2x - 4y = 3$ appartiene al fascio di rette generato dalle rette

$$r_1 : 2x - 3y = 1 \quad , \quad r_2 : 4x - 5y = 0 \ .$$

Sol. Dobbiamo trovare opportuni numeri reali h, k che risolvano il sistema

$$h(2, -3, 1) + k(4, -5, 0) = (2, -4, 3) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 2h + 4k = 2 \\ -3h - 5k = -4 \\ h + 0k = 3 \end{cases} \ .$$

Dalla terza equazione otteniamo subito $h = 3$, poi la prima equazione dà $k = -1$ e — importantissimo! — questi due valori sono compatibili con la seconda equazione che funge da "controllore".

Osserviamo che non è stato necessario calcolare il centro del fascio (risolvendo il sistema relativo alle due rette date). Abbiamo agito in modo meno invasivo, lavorando "dall'esterno" sui coefficienti delle equazioni, senza "sporcarci troppo le mani". Una risoluzione alternativa prevede invece il calcolo esplicito dell'intersezione e la verifica che tale punto soddisfa la terza equazione. La complessità di calcolo in questo caso è leggermente superiore (provare). Ciò nonostante, anche questa seconda strategia ha la sua dignità!

(il punto di intersezione risulta uguale a $(-\frac{5}{2}, -2)$)