Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbf{R}^5$ possono avere intersezione uguale a $\{\underline{0}\}$. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due versori può avere lunghezza "due terzi". [V]

$\diamondsuit$ Una matrice triangolare superiore è sempre invertibile. [F]

$\diamondsuit$ Il numero di pivot coincide col numero minimo di righe linearmente dipendenti. [F]

$\bigtriangledown$ Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$. $[-6]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la distanza tra i piani $\pi : x + y + z = 0$ e $\pi' : x + y + z + 5 = 0$. $[\frac{5}{\sqrt{3}}]$

$\bigtriangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 1)$ sia perpendicolare al segmento di estremi $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 5)$. $[-4]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la dimensione del sottospazio $\{(a + b + c + 9d, a - b, a, a) \colon a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$. [3]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbf{R}^7$ possono avere intersezione uguale a $\{\underline{0}\}$. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due versori può avere lunghezza "quattro terzi". [F]

$\diamondsuit$ Una matrice triangolare inferiore potrebbe essere non invertibile. [V]

$\diamondsuit$ Il determinante cambia segno se complessivamente scambiamo due righe e due colonne. [F]

$\bigtriangledown$ Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} -\sqrt{7} & -\sqrt{7} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$. $[\sqrt{14}]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la distanza tra i piani $\pi : x + y + z = 0$ e $\pi' : x + y + z - 1 = 0$. $[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

$\bigtriangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 1)$ sia perpendicolare al segmento di estremi $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 6)$. $[-5]$

$\bigtriangledown$ Calcolare la dimensione del sottospazio costituito dalle matrici triangolari superiori 5×5 aventi tutti zeri sulla diagonale principale. [10]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbf{R}^7$ possono avere l'intersezione di dimensione 5. [V]

$\diamondsuit$ Il prodotto vettoriale di due versori ortogonali ha lunghezza nulla. [F]

$\diamondsuit$ Esistono matrici diagonali non simmetriche. [F]

$\diamondsuit$ Il numero di pivot è influenzato dalle operazioni elementari. [F]

$\triangledown$ Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ \sqrt{3} & -8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$. [6]

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra i piani $\pi : x + y + z - 3 = 0$ e $\pi' : x + y + z = 0$. [$\sqrt{3}$]

$\triangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 1)$ sia perpendicolare al segmento di estremi $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 7)$. [-6]

$\triangledown$ Calcolare la dimensione del sottospazio costituito dalle matrici triangolari inferiori 6×6 aventi tutti zeri sulla diagonale principale. [15]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\diamondsuit$ Due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbf{R}^7$ possono avere l'intersezione di dimensione 4. [F]

$\diamondsuit$ Il prodotto scalare di due versori può essere maggiore di 1. [F]

$\diamondsuit$ Una matrice triangolare simmetrica è diagonale. [V]

$\diamondsuit$ Il numero di pivot coincide col numero minimo di colonne linearmente dipendenti. [F]

$\triangledown$ Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ \sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}^{-1}$. [$-3$]

$\triangledown$ Calcolare la distanza tra i piani $\pi : x + y + z = 0$ e $\pi' : x + y + z + 6 = 0$. [$\frac{6}{\sqrt{3}}$]

$\triangledown$ Determinare a in modo che il vettore $(a, a, 1)$ sia perpendicolare al segmento di estremi $(1, 1, 1)$ e $(6, 1, 1)$. [0]

$\triangledown$ Calcolare la dimensione del sottospazio $\{(a+b+c+9d+4e, a-b-c, a+b, a, a)\colon a, b, c, d, e \in \mathbf{R}\}$. [4]

PARTE 2. **In questa parte, $\boxed{\textbf{giustificare}}$ le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
Allegare il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.
Punteggio totale: **22**

1. [2.5]: Determinare una base del nucleo di $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita dalla legge $f(x, y, w, z) = (x + y + w + z, w - 3z)$.
[2]: Esiste un vettore che non abbia controimmagine rispetto a f?

Sol. Abbiamo due parametri e possiamo arrivare alla forma parametrica $(s, -s - 4t, 3t, t)$ da cui otteniamo la base

$$\{(1, -1, 0, 0), (0, -4, 3, 1)\} \ .$$

Questa funzione è suriettiva perché il rango della relativa matrice (ad es. rispetto alle basi canoniche) è uguale alla dimensione del codominio, quindi non esistono vettori che soddisfano la richiesta.

2. [3]: Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $13xy - 4 = 0$.
[2]: Scrivere le coordinate dei due fuochi nel riferimento Oxy iniziale.

Sol. Autovettori di $\begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & 0 \end{pmatrix}$: $(1, 1)$ per $\lambda = \frac{13}{2}$, $(-1, 1)$ per $\lambda = -\frac{13}{2}$. Mediante la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\frac{13}{2} X^2 - \frac{13}{2} Y^2 = 4 \ \Rightarrow \ \frac{X^2}{\frac{8}{13}} - \frac{Y^2}{\frac{8}{13}} = 1 \ .$$

I fuochi, nelle nuove coordinate, sono

$$\left(\pm \frac{4}{\sqrt{13}}, 0 \right) \ .$$

Applicando le formule del cambiamento di coordinate otteniamo quindi

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\frac{4}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \ .$$

3. [2.5]: Stabilire se esistono valori <u>non nulli</u> di h per i quali la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -h \\ 0 & h & 2 \end{pmatrix}$ ammette almeno due autovettori linearmente indipendenti.
[1.5]: Calcolare un autovettore nel caso in cui $h = \sqrt{8}$.

Sol. L'equazione caratteristica è

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + h^2) = 0$$

e il discriminante (diviso 4) dell'equazione di secondo grado vale $4 - 4 - h^2$. Per valori non nulli di h esso è negativo, quindi resta soltanto l'autovalore 3; la sua molteplicità algebrica vale solo 1, quindi esso darà luogo a un autospazio 1-dimensionale perchè la molteplicità geometrica non può superare quella algebrica.

Ponendo ora $h = \sqrt{8}$, risolviamo il sistema appunto con $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (t, 0, 0)$$

e possiamo prelevare un autovettore nell'autospazio trovato — ad es. $(1, 0, 0)$.

4. [2.5]: Dimostrare che l'asse y e la retta r, definita dal punto mobile $P(t) = (t+1, t, -t)$, sono rette sghembe.

[2.5]: Tra i punti di r, determinare quello che ha la stessa distanza dall'asse x e dall'asse z.

[2]: Calcolare il seno dell'angolo formato da r col piano yz.

Sol. Un vettore direttore dell'asse y è $(0,1,0)$. Un vettore congiungente due punti a piacere sulle rispettive rette è ad esempio — ponendo $t = 0$ —

$$(1-0, 0-0, 0-0) = (1,0,0) \ .$$

Un vettore di r è $(1,1,-1)$. Ora,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ .$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti e questo assicura che le due rette sono sghembe.

La distanza di un dato punto da uno dei tre assi coordinati può essere calcolata mediante il teorema di Pitagora applicato alle due coordinate non coinvolte (in alternativa è possibile considerare un idoneo piano perpendicolare all'asse, con le medesime conclusioni). Giusto come esempio, il punto $(4,9,8)$ dista $\sqrt{16+64}$ dall'asse y. Abbiamo quindi

$$\sqrt{t^2+t^2} = \sqrt{(t+1)^2+t^2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \ .$$

Il punto richiesto è

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ .$$

In effetti sarebbe sufficiente imporre che le due coordinate siano uguali.

Per il calcolo del seno utilizziamo la nota formula, ricordando che essa restituisce in questo caso proprio il seno, non il coseno:

$$\sin\theta = \frac{(1,0,0) \times (1,1,-1)}{\sqrt{1}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(il vettore normale che consideriamo è $(1,0,0)$ perché l'equazione del piano è $x = 0$).

5. [1.5]: Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,1,0,1)$ sul sottospazio $S = \langle(1,0,1,0), (2,1,-2,1)\rangle$.

Sol. I due generatori sono già ortogonali (e in particolare linearmente indipendenti) perché il loro prodotto scalare è nullo. Occorre quindi calcolare soltanto

$$\underline{p} = \frac{(0,1,0,1) \times (1,0,1,0)}{(1,0,1,0) \times (1,0,1,0)}(1,0,1,0) + \frac{(0,1,0,1) \times (2,1,-2,1)}{(2,1,-2,1) \times (2,1,-2,1)}(2,1,-2,1) = \frac{1}{5}(2,1,-2,1) \ .$$

<u>PARTE 2.</u> **In questa parte, $\boxed{\textbf{giustificare}}$ le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **22**

1. [2.5]: Determinare una base del nucleo di $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita dalla legge $f(x,y,w,z) = (x+y+w+z, -3x+y)$.

[2]: Determinare tre vettori che abbiano tutti la medesima immagine.

Sol. Abbiamo due parametri e possiamo arrivare alla forma parametrica $(s, 3s, -4s-t, t)$ da cui otteniamo la base

$$\{(1,3,-4,0), (0,0,-1,1)\} \ .$$

Il nucleo è uno degli insiemi dove poter prelevare tre vettori idonei. Basta scegliere tre coppie di parametri s, t.

2. [3]: Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $17xy - 3 = 0$.

[2]: Scrivere le equazioni dei due asintoti nel riferimento Oxy iniziale.

Sol. Autovettori di $\begin{pmatrix} 0 & \frac{17}{2} \\ \frac{17}{2} & 0 \end{pmatrix}$: $(1,1)$ per $\lambda = \frac{17}{2}$, $(-1,1)$ per $\lambda = -\frac{17}{2}$. Mediante la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\frac{17}{2} X^2 - \frac{17}{2} Y^2 = 3 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{6}{17}} - \frac{Y^2}{\frac{6}{17}} = 1 \, .$$

Le equazioni degli asintoti, nel nuovo riferimento, sono

$$Y = \pm X \, .$$

Applicando le formule inverse del cambiamento di coordinate, abbiamo:

$$X = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \, , \; Y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \, .$$

Ora, sostituendo, otteniamo le equazioni originali: $x = 0$ e $y = 0$; infatti l'iperbole è "equilatera".

3. [2.5]: Stabilire se esistono valori <u>non nulli</u> di h per i quali la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -h & 0 \\ h & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ammette almeno due autovettori linearmente indipendenti.

[1.5]: Calcolare un autovettore nel caso in cui $h = \sqrt{3}$.

Sol. L'equazione caratteristica è

$$(5 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 + h^2) = 0$$

e il discriminante (diviso 4) dell'equazione di secondo grado vale $9 - 9 - h^2$. Per valori non nulli di h esso è negativo, quindi resta soltanto l'autovalore 5; la sua molteplicità algebrica vale solo 1, quindi esso darà luogo a un autospazio 1-dimensionale perchè la molteplicità geometrica non può superare quella algebrica.

Ponendo ora $h = \sqrt{3}$, risolviamo il sistema appunto con $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, t)$$

e possiamo prelevare un autovettore nell'autospazio trovato — ad es. $(0, 0, 1)$.

4. [2.5]: Dimostrare che l'asse x e la retta r, definita dal punto mobile $P(t) = (-t, t, t+1)$, sono rette sghembe.

[2.5]: Tra i punti di r, determinare quelli distanti 8 dal piano yz.

[2]: Calcolare il seno dell'angolo formato da r col piano xz.

Sol. Un vettore direttore dell'asse x è $(1, 0, 0)$. Un vettore congiungente due punti a piacere sulle rispettive rette è ad esempio — ponendo $t = 0$ —

$$(0 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (0, 0, 1) \, .$$

Un vettore di r è $(-1, 1, 1)$. Ora,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ .$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti e questo assicura che le due rette sono sghembe.

La distanza dal piano yz è semplicemente il modulo della prima coordinata, quella relativa all'asse x. Imponiamo quindi che $|-t| = 8$ ottenendo subito $t = \pm 8$.

Per il calcolo del seno utilizziamo la nota formula, ricordando che essa restituisce in questo caso proprio il seno, non il coseno:

$$\sin\theta = \frac{(0,1,0) \times (-1,1,1)}{\sqrt{1}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(il vettore normale che consideriamo è $(0,1,0)$ perché l'equazione del piano è $y = 0$).

5. [1.5]: Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,1,0)$ sul sottospazio $S = \langle (0,1,0,1), (1,-2,1,2) \rangle$.

Sol. I due generatori sono già ortogonali (e in particolare linearmente indipendenti) perché il loro prodotto scalare è nullo. Occorre quindi calcolare soltanto

$$\underline{p} = \frac{(1,0,1,0) \times (0,1,0,1)}{(0,1,0,1) \times (0,1,0,1)}(0,1,0,1) + \frac{(1,0,1,0) \times (1,-2,1,2)}{(1,-2,1,2) \times (1,-2,1,2)}(1,-2,1,2) = \frac{1}{5}(1,-2,1,2) \ .$$