Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

◇ 6 vettori non possono generare uno spazio vettoriale di dimensione 4. [F]

◇ I vettori perpendicolari al vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ formano un sottospazio di dimensione 1. [F]

◇ Un sistema lineare omogeneo potrebbe essere senza soluzione. [F]

◇ Il prodotto di due matrici 3×3 invertibili è una matrice invertibile. [V]

▽ Calcolare il rango della matrice 7×7 che ha tutti 4 ad eccezione di uno zero al centro della matrice. [2]

▽ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare) del vettore $(3,7)$ sulla retta di equazione $y=5x$. [$\frac{38}{\sqrt{26}}$]

▽ Determinare il numero reale positivo h in modo che $(\sqrt{3},h)$ sia un autovettore per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{12} & 8 \end{pmatrix}$. [2]

▽ Calcolare la dimensione del sottospazio delle matrici simmetriche 5×5. [15]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

◇ 6 vettori possono generare uno spazio vettoriale di dimensione 4. [V]

◇ I vettori paralleli al vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ formano un sottospazio di dimensione 1. [V]

◇ Un sistema lineare omogeneo ammette un'unica soluzione: quella nulla. [F]

◇ La somma di due matrici 3×3 invertibili è una matrice invertibile. [F]

▽ Calcolare il massimo numero di zeri che può avere una matrice 3×4 di rango 2. [10]

▽ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare) del vettore $(3,7)$ sulla retta di equazione $y=4x$. [$\frac{31}{\sqrt{17}}$]

▽ Determinare il numero reale negativo h in modo che $(\sqrt{2},h)$ sia un autovettore per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{8} & 3 \end{pmatrix}$. [-2]

▽ Calcolare la dimensione del sottospazio delle matrici simmetriche 6×6. [21]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

♢ In uno spazio vettoriale di dimensione 6 possono esistere 7 vettori linearmente dipendenti. [V]

♢ I vettori perpendicolari al vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ formano un sottospazio di dimensione 2. [V]

♢ Un sistema lineare omogeneo ammette sempre infinite soluzioni. [F]

♢ Il rango di una matrice 3×3 non invertibile è uguale a 2. [F]

▽ Calcolare il rango di una matrice diagonale 7×7 che ha 4 zeri sulla diagonale principale. [3]

▽ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare) del vettore $(3, 8)$ sulla retta di equazione $y = 5x$. [$\frac{43}{\sqrt{26}}$]

▽ Determinare il numero reale positivo h in modo che $(\sqrt{2}, h)$ sia un autovettore per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{8} & 3 \end{pmatrix}$. [1]

▽ Calcolare la dimensione del sottospazio formato dai vettori di $\mathbf{R}^{11}$ che si leggono nello stesso modo al contrario. [6]

Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

PARTE 1. *Quesiti* **(rispondere soltanto su questo foglietto, senza alcuna spiegazione aggiuntiva)**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

♢ 6 vettori linearmente dipendenti possono generare uno spazio vettoriale di dimensione 5. [V]

♢ I vettori paralleli al vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ formano un sottospazio di dimensione 2. [F]

♢ Un sistema lineare omogeneo in 4 incognite può avere un'unica soluzione. [V]

♢ Il prodotto di due matrici 2×2 simmetriche è una matrice simmetrica. [F]

▽ Calcolare il rango della matrice 7×7 che ha tutti 4 ad eccezione di quattro zeri agli angoli della matrice. [2]

▽ Calcolare la proiezione ortogonale (scalare) del vettore $(4, 7)$ sulla retta di equazione $y = 6x$. [$\frac{46}{\sqrt{37}}$]

▽ Determinare il numero reale negativo h in modo che $(\sqrt{3}, h)$ sia un autovettore per la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{12} & 8 \end{pmatrix}$. [-1]

▽ Calcolare la dimensione del sottospazio formato dai vettori di $\mathbf{R}^{11}$ che hanno zeri in tutti i posti dispari. [5]

PARTE 2. **In questa parte, $\boxed{\text{giustificare}}$ le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **21**

1. [3.5]: Calcolare la distanza tra l'asse x e la retta $r : \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$.

[3.5]: Tra i piani che contengono r determinare quelli distanti $\frac{8}{\sqrt{19}}$ dal punto $(1,1,1)$.

Sol. Mediante il fascio di piani $\lambda(x+y+z+1)+\mu(x-y+z-1)=0$ troviamo il piano contenente r e parallelo all'asse x, grazie alla condizione

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda+\mu & \lambda-\mu & \lambda+\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu \Rightarrow [y+1=0]$$

(abbiamo utilizzato in particolare le equazioni $y=0$, $z=0$ dell'asse x).

Ora scegliamo un punto a piacere sull'asse x, ad es. l'origine, e calcoliamo la distanza dal piano:

$$\delta = \frac{|1|}{\sqrt{1}} = 1$$

(in alternativa possiamo ragionare geometricamente in modo molto semplice).

Utilizzando il fascio di piani già a disposizione, poniamo $\mu = 1$ rinunciando quindi al piano avente $\mu = 0$, e otteniamo la condizione

$$\frac{|4\lambda|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} \Rightarrow 304\lambda^2 = 192\lambda^2+128\lambda+192 \Rightarrow \lambda \in \left\{-\frac{6}{7}, 2\right\} .$$

Otteniamo così le equazioni richieste, sostituendo $\mu = 1$ in entrambi i casi, insieme a uno o all'altro valore di λ, nell'equazione del fascio di piani.

2. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x,y,z) = (2x-y+3z, 4z, 4x-2y+2z)$. [2.5]: Calcolare autovettori linearmente indipendenti di f (il massimo numero). [2]: Stabilire se esistono vettori del codominio non raggiunti da questa funzione.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 2-s & -1 & 3 \\ 0 & -s & 4 \\ 4 & -2 & 2-s \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s \in \{4, 0\} .$$

Un autovettore relativo a $s=4$ è $(1,1,1)$; l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2 ma restituisce solo un autovettore, ad es. $(1,2,0)$.

Questa funzione non è suriettiva perché il rango della matrice è minore della dimensione del codominio, quindi esistono vettori che non hanno controimmagine.

3. [3]: Utilizzando una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $33x^2 - 12xy + 17y^2 - 105 = 0$.

Sol. Autovettori di $\begin{pmatrix} 33 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$: $(1,3)$ per $\lambda = 15$, $(-3,1)$ per $\lambda = 35$. Mediante la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

arriviamo alla forma canonica

$$\frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{3} = 1 .$$

4. [3]: Calcolare la proiezione ortogonale (vettoriale) del vettore $(0,0,1)$ rispetto al sottospazio $S = \langle (2,1,3), (1,2,5), (4,5,13) \rangle$.

Sol. S è generato da due soli vettori, ad es. i primi due. Ortogonalizzando il secondo abbiamo

$$(1,2,5) - \frac{19}{14}(2,1,3) \ \to \ (\times 14) \ = (-24,9,13) \ .$$

Calcoliamo ora la proiezione:

$$\underline{p} = \frac{3}{14}(2,1,3) + \frac{13}{576+81+169}(-24,9,13) = \left(\frac{3}{59}, \frac{21}{59}, \frac{50}{59}\right) \ ,$$

ma un metodo molto meno laborioso consiste nel sottrarre a $(0,0,1)$ la sua proiezione lungo la direzione del *prodotto vettoriale* $(2,1,3) \wedge (1,2,5) = (-1,-7,3)$, ottenendo presto

$$\underline{p} = (0,0,1) - \frac{3}{59}(-1,-7,3) = \left(\frac{3}{59}, \frac{21}{59}, \frac{50}{59}\right) .$$

5. [3.5]: Al variare di $k \in \mathbf{R}$ discutere l'esistenza di un'unica soluzione o di ∞^c soluzioni o l'assenza di soluzioni, per il sistema $\begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Sol. Il rango della matrice incompleta scende a 2 se

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2k^2 + 3k = 0 \ ,$$

quindi per i valori 0 e $\frac{3}{2}$. In virtù del teorema degli orlati è sufficiente ora esaminare il minore (della matrice completa)

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2k \ ,$$

avendo orlato la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Traiamo ora le conclusioni. Per $k = 0$ i due ranghi sono uguali a 2 e abbiamo quindi soluzioni con 1 parametro; per $k = \frac{3}{2}$ non esistono soluzioni perché i due ranghi sono diversi $(2 < 3)$; per tutti gli altri valori di k torna la risolubilità ma con un'unica soluzione perché i due ranghi sono uguali a 3.