Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **Data e Firma**: ....

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.

Lasciare uno spazio di circa 5 cm all'inizio, con nome e cognome.

INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **31.5**

1. [3.5 punti] Stabilire se esistono valori di k per i quali il sistema $\begin{cases} kx + 2ky - z = 0 \\ 2x - z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases}$ ammette una soluzione con parametri.

Sol. Non esiste alcun valore (per $k = -\frac{2}{11}$ l'incompleta ha rango 2 ma la completa ha rango 3).

2. [3 punti] Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (8x, 5y+z, 10y+2z)$, determinarne una base di autovettori.

[2 punti] Esibire un vettore che non abbia controimmagine secondo f.

[2 punti] Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine.

[2 punti] Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ del codominio.

Sol. $\{(0, 1, -5), (1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$; $\underline{v}$ non ha controimmagine se, posto in colonna, aumenta il rango della matrice (sistema impossibile); f non è iniettiva, quindi esistono coppie siffatte; le colonne della nuova matrice sono le vecchie colonne (matrice di f rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio) scritte nelle coordinate secondo la base data. Mediante il prodotto di matrici otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 8 & -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. [2 punti] Stabilire se l'asse y è contenuto nel piano $\pi : 3x - z = 1$.

[3 punti] Determinare un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a π e passante per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 4)$.

[3.5 punti] Tra i punti della retta passante per A e B, determinare quelli distanti $\sqrt{10}$ da π.

Sol. No; $x - 13y + 3z - 1 = 0$; $(-7, -8, -32)$, $(13, 12, 48)$.

4. [3 punti] . Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ sul sottospazio $S : x + y - w - z = 0$.

[2.5 punti] Calcolare la dimensione di $S + \langle (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, -1) \rangle$.

Sol. È consigliabile utilizzare la componente ortogonale:

$\underline{p} = \underline{v} - \underline{c} = (1, 0, 0, 0) - \frac{1}{4}(1, 1, -1, -1) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La dimensione della somma resta uguale alla dimensione di S perché i due generatori sono elementi di S stesso.

5. [3 punti] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $3x^2 + 12xy + 19y^2 - 42 = 0$.

[2 punti] Determinare le coordinate originali di un suo fuoco (scelto a piacere).

Sol. Autovettori: $(3, -1)$, $(1, 3)$; $\frac{X^2}{42} + \frac{Y^2}{2} = 1$; $(6, -2)$.