SOLUZIONI (PROVA DELL'11 FEBBRAIO 2019)

$\odot$ Il rango per righe può superare di 1 il rango per colonne. [F]

$\odot$ In $\mathbf{R}^6$ possono esistere 7 generatori di un sottospazio. [V]

$\odot$ $\{(1+2k, 2-k, 0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ per ogni valore reale di k. [F]

$\odot$ Due rette sghembe sono simultaneamente parallele a infiniti piani. [V]

$\odot$ Determinare h in modo che il vettore $(h, h+1, h+2)$ sia parallelo al piano di equazione $x-y+z-1=0$. [-1]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio (in $\mathbf{R}^5$) di equazioni $x_1 - x_2 = 4x_2 - 4x_1 = x_3 + x_4 + x_5 = 0$. [3]

$\odot$ Determinare p in modo che l'equazione $3x^2 + pxy + 12y^2 - 2x + y + 8 = 0$ rappresenti una parabola. [12] (oppure [± 12], o [-12])

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(1,2)$ dell'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. [1]

....

$\odot$ Il rango per colonne è uguale al numero di pivot di una riduzione a gradini. [V]

$\odot$ In $\mathbf{R}^7$ possono esistere basi di sottospazi formate da 5 vettori. [V]

$\odot$ Esistono valori di k tali che $\{(1+2k, 2-k, 0, 0), (1, k-1, 0, 0), (0,0,1,4)\}$ sia una base di $\mathbf{R}^4$. [F]

$\odot$ Due rette sghembe sono simultaneamente parallele a un unico piano. [F]

$\odot$ Determinare h in modo che il vettore $(h, h+1, h+1)$ sia parallelo al piano di equazione $x-y+z-1=0$. [0]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio (in $\mathbf{R}^5$) di equazioni $x_1 - x_2 = 4x_2 + 4x_1 = x_3 + x_4 + x_5 = 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$. [2]

$\odot$ Determinare p in modo che l'equazione $25x^2 + pxy + y^2 - 2x + y + 8 = 0$ rappresenti una parabola. [10] (oppure [± 10], o [-10])

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(2,1)$ dell'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. [0]

....

$\odot$ Una matrice 3×8 con tutti 4 ad eccezione di uno 0 ha rango 3. [F]

$\odot$ Se $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{z}$ sono vettori di una base, $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. [V]

$\odot$ $\{(1+k^2, k^2, 0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ genera $\mathbf{R}^3$ per ogni valore reale di k. [V]

$\odot$ Due rette sghembe sono simultaneamente perpendicolari a un'unica retta. [V]

$\odot$ Determinare h in modo che il vettore $(h, h+1, h+5)$ sia parallelo al piano di equazione $x-y+z-1=0$. [-4]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio (in $\mathbf{R}^5$) di equazioni $2x_1 + x_2 = 4x_2 + 8x_1 = x_3 + x_4 + x_5 = 0$. [3]

$\odot$ Determinare p in modo che l'equazione $x^2 + pxy + 9y^2 - 2x + y + 8 = 0$ rappresenti una parabola. [6] (oppure [± 6], o [-6])

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(2, 3)$ dell'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. [$\frac{1}{3}$]

....

$\odot$ Una matrice 4×7 con tutti 3 ad eccezione di uno 0 ha rango 2. [V]

$\odot$ Se $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{z}$ sono linearmente dipendenti, $2\underline{u}$, $2\underline{v}$, $2\underline{w}$ sono linearmente dipendenti. [F]

$\odot$ Il prodotto vettoriale di vettori perpendicolari è il vettore nullo. [F]

$\odot$ $\{(14 + 2k^2, 7 + k^2), (2, 1), (10, 5)\}$ non genera $\mathbf{R}^2$ per alcun valore reale di k. [V]

$\odot$ Determinare h in modo che il vettore $(h, h + 1, h + 4)$ sia parallelo al piano di equazione $x - y + z - 1 = 0$. [-3]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio (in $\mathbf{R}^5$) di equazioni $x_1 - x_2 = x_2 + x_1 = x_3 + x_4 + x_5 = x_3 - x_4 = x_4 - x_3 = 0$. [1]

$\odot$ Determinare p in modo che l'equazione $5x^2 + pxy + 20y^2 - 2x + y + 8 = 0$ rappresenti una parabola. [20] (oppure [± 20], o [-20])

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(3, 2)$ dell'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. [0]

....

$\odot$ Riducendo a gradini la trasposta di una matrice, otteniamo lo stesso numero di pivot. [V]

$\odot$ È possibile che due sottospazi di $\mathbf{R}^4$ non abbiano alcun vettore nell'intersezione. [F]

$\odot$ 3 equazioni possono definire una retta nello spazio $Oxyz$. [V]

$\odot$ $\{(1 + k^2, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ genera $\mathbf{R}^2$ per ogni valore reale di k. [V]

$\odot$ Determinare h in modo che il vettore $(h, h + 1, h + 3)$ sia parallelo al piano di equazione $x - y + z - 1 = 0$. [-2]

$\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio (in $\mathbf{R}^4$) di equazioni $x_1 - x_2 = x_2 - x_1 = x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0$. [1]

$\odot$ Determinare p in modo che l'equazione $4x^2 + pxy + 16y^2 - 2x + y + 8 = 0$ rappresenti una parabola. [16] (oppure [± 16], o [-16])

$\odot$ Calcolare il valore nel posto $(1, 2)$ dell'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. [1]

– –

– –

1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere equazioni cartesiane della retta (incidente e) perpendicolare all'asse y, contenuta nel piano $\pi : y - 5 = 0$ e parallela al piano $\pi' : 4x - 3y - z - 2 = 0$. Successivamente determinare i punti del piano π' che sono contenuti simultaneamente nelle sfere di raggio 5 con centro in $(0, 0, 0)$ e in $(0, 1, 0)$.

Sol. La retta cercata incontra l'asse y nel punto $(0, 5, 0)$; inoltre il suo vettore direttore (p, q, r) soddisfa le equazioni $(p, q, r) \times (0, 1, 0) = 0 \wedge 4p - 3q - 1r = 0$. Otteniamo ad es. le equazioni parametriche $(x, y, z) = (0, 5, 0) + t(1, 0, 4)$ da cui seguono le equazioni cartesiane $y - 5 = 4x - z = 0$.

Nella seconda richiesta, i punti devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y - z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases}.$$

Dalle ultime due equazioni deduciamo (con l'eliminazione) che $y = \frac{1}{2}$. Sostituendo y nella prima equazione troviamo $z = 4x - \frac{7}{2}$. Tornando alla seconda equazione otteniamo

$$x^2 + \frac{1}{4} + 16x^2 + \frac{49}{4} - 28x - 25 = 0$$

da cui segue che $x = \frac{28 \pm \sqrt{1634}}{34}$, ecc.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, 0, x + y + z)$, determinarne una base di autovettori. Determinare poi due vettori che siano linearmente indipendenti e non abbiano controimmagine secondo f.

Sol. Autovalori: 0 (autospazio con base ad es. $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$) e 2 (autovettore: $(1, 0, 1)$). Per la seconda richiesta occorrono due vettori non proporzionali a $(1, 0, 1)$ e non proporzionali tra loro.

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 0, 0)$ sul sottospazio $S : x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calcolare la dimensione di $S + \langle (2, 2, -1, -1), (3, 3, 3, 3) \rangle$.

Sol. Una base di S è $\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)\}$. Ortogonalizzando il secondo vettore otteniamo la base ortogonale $\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 2, -3)\}$. La proiezione ortogonale è $\frac{1}{3}(1, 1, -1, 0) + \frac{1}{15}(1, 1, 2, -3) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Lo studio del rango della relativa matrice di ordine 4 consente di stabilire che la dimensione vale 3 (nella matrice non è necessario inserire la base ortogonale; è sufficiente la base iniziale). Meglio ancora, possiamo notare che solo uno dei due vettori soddisfa le equazioni di S.

4. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ è noto che $g(2, 3) = (9, 0, 1)$ e $g(3, 2) = (2, 8, 7)$. Calcolare $g^{-1}(24, 24, 23)$.

Sol. Poiché $(24, 24, 23) = 2(9, 0, 1) + 3(2, 8, 7)$, la linearità di g consente di calcolare la controimmagine come $2(2, 3) + 3(3, 2) = (13, 12)$.

5. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $13x^2 - 18xy + 37y^2 - 80 = 0$. Determinare le coordinate originali dei fuochi di questa conica.

Sol. Autovettori: $(3, 1)$ per $\lambda = 10$, $(-1, 3)$ per $\lambda = 40$. Forma canonica: $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{2} = 1$. Sostituendo i fuochi $(\pm\sqrt{6}, 0)$ mediante le formule $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(X + 3Y)$ otteniamo le coordinate iniziali: $\left(\pm 3\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

....

1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere equazioni cartesiane della retta (incidente e) perpendicolare all'asse x, contenuta nel piano $\pi : x - 5 = 0$ e parallela al piano $\pi' : 3x - 4y + z + 2 = 0$. Successivamente determinare i punti del piano π' che sono contenuti simultaneamente nelle sfere di raggio 5 con centro in $(0, 0, 0)$ e in $(1, 0, 0)$.

Sol. La retta cercata incontra l'asse x nel punto $(5, 0, 0)$; inoltre il suo vettore direttore (p, q, r) soddisfa le equazioni $(p, q, r) \times (1, 0, 0) = 0 \wedge 3p - 4q + r = 0$. Otteniamo ad es. le equazioni parametriche $(x, y, z) = (5, 0, 0) + t(0, 1, 4)$ da cui seguono le equazioni cartesiane $x - 5 = 4y - z = 0$.

Nella seconda richiesta, i punti devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y + z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}.$$

Dalle ultime due equazioni deduciamo (con l'eliminazione) che $x = \frac{1}{2}$. Sostituendo x nella prima equazione troviamo $z = 4y - \frac{7}{2}$. Tornando alla seconda equazione otteniamo

$$\frac{1}{4} + y^2 + 16y^2 + \frac{49}{4} - 28y - 25 = 0$$

da cui segue che $y = \frac{28 \pm \sqrt{1634}}{34}$, ecc.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (0, x + y + z, 0)$, determinarne una base di autovettori. Determinare poi due vettori che siano linearmente indipendenti e abbiano la stessa immagine secondo f.

Sol. Autovalori: 0 (autospazio con base ad es. $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$) e 1 (autovettore: $(0, 1, 0)$). Per la seconda richiesta sono idonei ad es. due vettori del nucleo – quegli stessi autovettori con autovalore 0.

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0, 0)$ sul sottospazio $S : x_1 - x_2 = x_1 + x_3 + x_4 = 0$. Calcolare la dimensione di $S + \langle(2, 2, -1, -1), (1, 1, 4, -5)\rangle$.

Sol. Una base di S è $\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)\}$. Ortogonalizzando il secondo vettore otteniamo la base ortogonale $\{(1, 1, -1, 0), (1, 1, 2, -3)\}$. La proiezione ortogonale è $\frac{1}{3}(1, 1, -1, 0) + \frac{1}{15}(1, 1, 2, -3) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Lo studio del rango della relativa matrice di ordine 4 consente di stabilire che la dimensione vale 2 (nella matrice non è necessario inserire la base ortogonale; è sufficiente la base iniziale). Meglio ancora, possiamo notare che entrambi i vettori soddisfano le equazioni di S.

4. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ è noto che $g(3, 2) = (9, 0, 1)$ e $g(2, 3) = (2, 8, 7)$. Calcolare $g(50, 50)$.

Sol. Poiché $(50, 50) = 10(3, 2) + 10(2, 3)$, la linearità di g consente di calcolare l'immagine come $10(9, 0, 1) + 10(2, 8, 7) = (110, 80, 80)$.

5. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $37x^2 - 18xy + 13y^2 - 40 = 0$. Determinare le equazioni originali delle direttrici di questa conica.

Sol. Autovettori: $(1, 3)$ per $\lambda = 10$, $(-3, 1)$ per $\lambda = 40$. Forma canonica: $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$. Sostituendo le equazioni delle direttrici, $X = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$, mediante le formule inverse $X = \frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x+y)$ – occorre soltanto la prima – otteniamo le equazioni $\frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y) = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$.

....

1. Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, scrivere equazioni cartesiane della retta (incidente e) perpendicolare all'asse z, contenuta nel piano $\pi : z - 5 = 0$ e parallela al piano $\pi' : 4x - y - 3z - 2 = 0$. Successivamente determinare i punti del piano π' che appartengono simultaneamente alla sfera di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 4, e alla sfera con centro nell'origine e raggio 4.

Sol. La retta cercata incontra l'asse z nel punto $(0, 0, 5)$; inoltre il suo vettore direttore (p, q, r) soddisfa le equazioni $(p, q, r) \times (0, 0, 1) = 0 \wedge 4p - q - 3r = 0$. Otteniamo ad es. le equazioni parametriche $(x, y, z) = (0, 0, 5) + t(1, 4, 0)$ da cui seguono le equazioni cartesiane $z - 5 = 4x - y = 0$.

Nella seconda richiesta, i punti devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 4x - y - 3z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases} .$$

Dalle ultime due equazioni deduciamo (con l'eliminazione) che $z = \frac{1}{2}$. Sostituendo z nella prima equazione troviamo $y = 4x - \frac{7}{2}$. Tornando alla terza equazione otteniamo

$$x^2 + 16x^2 - 28x + \frac{49}{4} + \frac{1}{4} - 16 = 0$$

da cui segue che $x = \frac{28 \pm \sqrt{1122}}{34}$, ecc.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (0, x + y + z, x + y + z)$, determinarne una base di autovettori. Stabilire se può esistere un vettore $\underline{v}$, diverso dal vettore nullo, la cui immagine sia lo stesso $\underline{v}$.

Sol. Autovalori: 0 (autospazio con base ad es. $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$) e 2 (autovettore: $(0, 1, 1)$). Non può esistere un vettore come nella richiesta, perché non ci sono autovalori uguali a 1.

3. Calcolare la componente ortogonale di $(0, 0, 1)$ rispetto al sottospazio $S : x_1 - x_2 = x_2 + x_3 = 0$ (attenzione: non la proiezione!). Stabilire se S forma una somma diretta col sottospazio T di equazione $x_1 = 0$.

Sol. Una base di S è $\{(1, 1, -1)\}$. La componente ortogonale richiesta è $(0, 0, 1) - \frac{-1}{3}(1, 1, -1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

La somma $S + T$ è effettivamente $S \oplus T$ perché $S \cap T = \{\underline{0}\}$.

4. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ è noto che $g(2, 3) = (9, 0, 1, 0)$ e $g(3, 2) = (18, 0, 2, 0)$. Calcolare una base del nucleo di g.

Sol. Imponendo che $\alpha(9, 0, 1, 0) + \beta(18, 0, 2, 0)$ sia uguale a $(0, 0, 0, 0)$ otteniamo $\alpha = -2\beta$. Grazie alla linearità, tutti e soli i vettori del tipo $-2\beta(2, 3) + \beta(3, 2)$ (dunque $(-\beta, -4\beta)$) appartengono al nucleo. Una base è ad es. $\{(1, 4)\}$.

5. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $13x^2 + 18xy + 37y^2 - 120 = 0$. Determinare le coordinate originali dei fuochi di questa conica.

Sol. Autovettori: $(3, -1)$ per $\lambda = 10$, $(1, 3)$ per $\lambda = 40$. Forma canonica: $\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{3} = 1$. Sostituendo i fuochi $(\pm 3, 0)$ mediante le formule $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3X + Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-X + 3Y)$ otteniamo le coordinate iniziali: $\left(\pm\frac{9}{\sqrt{10}}, \mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.