Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 32.5 . I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.
Voto minimo per l'ammissione all'orale: **14.67 (" 15 - ")**.
In presenza di una prova scritta consegnata in un appello recente[1] il voto minimo è **13.33 (" 13 + ")**.

Esercizio 1.

In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : 2x - y - z = x + y + z = 0$ e $s : 2x - y - z + 1 = x - 2y - 2z + 1 = 0$.

$\boxed{2.5}$ Dimostrare che esse sono parallele.

$\boxed{3}$ Calcolare la loro distanza.

$\boxed{3.5}$ Scrivere equazioni cartesiane della retta complanare ed equidistante da r e s (parallela alle due rette).

Sol. Un vettore direttore di r è $(0, 1, -1)$ ed esso soddisfa il sistema omogeneo di s. Inoltre il primo piano che definisce r è parallelo al primo piano che definisce s, quindi il sistema complessivo è senza soluzione.

Scelta l'origine come punto di r, facciamo passare per tale punto il piano ortogonale con equazione $y - z = 0$. Ora il sistema con s dà il punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. La distanza tra i due punti è $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Il punto medio tra i due punti studiati prima è $M = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$. Adattando i termini noti del sistema che definisce r, con l'ipotesi di passaggio per M, otteniamo $4x - 2y - 2z + 1 = x + y + z = 0$.

Esercizio 2.

$\boxed{2.5}$ Determinare il numero reale positivo k in modo che $(2, k, k)$ sia un autovettore per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

$\boxed{2}$ Determinare due vettori non proporzionali e non appartenenti all'immagine di f.

$\boxed{2.5}$ Calcolare una base del nucleo di f.

Sol. L'immagine del vettore in esame è $(2 + 2k, 2 + 2k, 2 + 2k)$. Essa è proporzionale a $(2, k, k)$ se $k = -1$ oppure $k = 2$, data la coincidenza delle tre componenti. Troviamo quindi $k = 2$.

Due vettori non appartenenti al sottospazio $\langle(1, 1, 1)\rangle$ sono ad esempio $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ (insieme al vettore dato devono formare una matrice con determinante non nullo).

L'equazione $x + y + z = 0$ definisce il nucleo di f. Una base di questo sottospazio è ad es. $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$.

Esercizio 3.

$\boxed{3}$ In $\mathbf{R}^4$, calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0, 1)$ rispetto al sottospazio generato da $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$,$(2, 2, 5, 2)$.

$\boxed{2.5}$ Scrivere equazioni cartesiane (il minimo numero) di tale sottospazio.

Sol. Dei tre vettori dati, soltanto due risultano linearmente indipendenti. Considerando i primi due, ortogonalizziamo il primo rispetto al secondo ottenendo così il nuovo vettore

$$(1, 1, 1, 1) - \frac{1}{1}(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 0, 1) \ .$$

Ora proiettiamo il vettore assegnato, ottenendo

$$\underline{p} = \frac{2}{3}(1, 1, 0, 1) + \frac{0}{1}(0, 0, 1, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \ .$$

Partiamo dalle equazioni parametriche e ricaviamo le cartesiane:

$$(x, y, w, z) = s(1, 1, 0, 1) + t(0, 0, 1, 0) \Rightarrow x = y = z$$

(la w non ha restrizioni). Otteniamo infine $x - y = y - z = 0$.

Esercizio 4.

[1] Dichiarare questa situazione all'inizio del primo foglio.

$\boxed{1.5}$ Dimostrare che non esiste alcun valore di p per cui l'equazione $2pxy + y^2 - 9 = 0$ rappresenti un'ellisse.

$\boxed{2.5}$ Ponendo successivamente $p = 3$, scrivere una forma canonica della relativa conica (sugg. : utilizzare il metodo del determinante invariante).

Sol. Il determinante $\begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 1 \end{vmatrix}$ non è positivo per alcun valore reale di p.

Con $p = 3$ otteniamo gli autovalori $\frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$. Dall'uguaglianza

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{37}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{37}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$

troviamo $H = -9$ e concludiamo con la forma canonica

$$\frac{X^2}{\frac{18}{1+\sqrt{37}}} - \frac{Y^2}{\frac{18}{\sqrt{37}-1}} = 1 \ .$$

Esercizio 5.

$\boxed{2}$ Dimostrare che l'inversa della matrice AB, prodotto di due matrici invertibili, è la matrice $B^{-1}A^{-1}$.

Sol. Fissiamo l'ordine della matrice uguale a n. Abbiamo: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$ e similmente con $(B^{-1}A^{-1})(AB)$.

Esercizio 6.

$\boxed{2.5}$ Dimostrare che $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ non è una base dello spazio vettoriale costituito dai polinomi di grado minore di 7.

Sol. Occorre aggiungere un ulteriore polinomio (ad es. la costante 1).

Esercizio 7.

$\boxed{2.5}$ Stabilire se la funzione da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ che porta qualunque vettore del dominio nello zero del codominio, ammette autovettori.

Sol. Per questa funzione ogni vettore non nullo è un autovettore; infatti il nucleo si estende a tutto il dominio.