PARTE 1.

$\odot$ In $\mathbf{R}^5$ l'intersezione di due sottospazi di dimensione 3 può avere dimensione 2. [sì]

$\odot$ La retta passante per $(1,-1,0)$ e $(0,1,2)$ contiene anche il punto $(2,-1,2)$ [no]

$\odot$ La somma di due autovettori (di una data funzione) può essere nulla. [sì]

$\odot$ Due rette incidenti hanno giaciture diverse. [sì]

$\odot$ Determinare a in modo che il vettore $(-1,-1,a)$ sia parallelo alla retta di equazioni $x-y=y+z-2=0$. $[\ 1\ ]$

$\odot$ Calcolare il numero nel posto $(1,1)$ della matrice risultante dal seguente prodotto: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$. $[\ \frac{1}{5}\ ]$

$\odot$ Calcolare l'eccentricità della curva di equazione $xy=9$. $[\ \sqrt{2}\ ]$

$\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di $f:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,0)$. $[\ 4\ ]$

PARTE 2.

1. Determinare i valori di k tali che $\langle (k,k+1,0,1),(2,5,-1,3),(2,4,k-1,2)\rangle$ abbia dimensione 2. Successivamente, porre $k=1$ e calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ sul sottospazio ottenuto.

Sol. Mediante il teorema degli orlati è sufficiente imporre l'annullamento di due minori opportuni, di ordine 3. Si ha: $k\in\{0,1\}$. Proiezione: $\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

2. Data l'applicazione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z)=(x,3y-2z,5y-4z)$, determinarne una base di autovettori. Esibire il prodotto di tre matrici che diagonalizza la matrice di f nelle basi canoniche (senza calcolare il prodotto) e scrivere la matrice risultante. Scrivere infine la matrice di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ del codominio.

Sol. $\lambda=1:\{(1,0,0),(0,1,1)\}$; $\lambda=-2:(0,2,5)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Scrivere equazioni cartesiane della retta perpendicolare al piano $\pi: x-y+2z-1=0$ e passante per l'origine. Calcolare il seno dell'angolo acuto formato da π con l'asse z. Infine determinare una base della giacitura di π.

Sol. $x+y=2x-z=0$; $\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$.

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $3x^2+4xy-8=0$. Determinare le equazioni originali delle direttrici.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\Rightarrow\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{8}=1$; applicando le trasformazioni inverse alle equazioni delle direttrici ruotate ($X=\pm\frac{a^2}{c}$), otteniamo: $x-2y\pm\sqrt{2}=0$.

5. Data l'applicazione lineare g tale che $g(1,2)=(2,3)$ e $g(4,5)=(0,1)$, calcolare $g(1,0)$.

Sol. Dopo aver calcolato le coordinate di $(1,0)$ rispetto alla base $\{(1,2),(4,5)\}$, grazie alla linearità otteniamo: $\left(-\frac{10}{3},-\frac{13}{3}\right)$.