1. Stabilire se esistono valori di k per i quali il sistema $\begin{cases} kx + 2ky - z = 0 \\ 2x - z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases}$ ammette una soluzione parametrica.

Sol. Non esiste alcun valore (per $k = -\frac{2}{11}$ l'incompleta ha rango 2 ma la completa ha rango 3).

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x, 5y + z, 10y + 2z)$, determinarne una base di autovettori. Esibire un vettore che non abbia controimmagine secondo f. Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ del codominio.

Sol. $\{(0, 1, -5), (1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$; $\underline{v}$ non ha controimmagine se, posto in colonna, aumenta il rango della matrice (sistema impossibile); f non è iniettiva, quindi esistono coppie siffatte; le colonne della nuova matrice sono le vecchie colonne (matrice di f rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio) scritte nelle coordinate secondo la base data.

3. Stabilire se l'asse y è contenuto nel piano $\pi : 3x - z = 1$. Determinare il piano perpendicolare a π e passante per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 4)$. Tra i punti della retta passante per A e B, determinare quelli distanti $\sqrt{10}$ da π.

Sol. No; $x - 13y + 3z - 1 = 0$; $(-7, -8, -32)$, $(13, 12, 48)$.

4. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 0, 0)$ sul sottospazio $S : x + 2y + 3z = 0$.

Sol. $\left(\frac{13}{14}, -\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}\right)$.

5. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $3x^2 + 12xy + 19y^2 - 42 = 0$. Determinare le coordinate originali di un suo fuoco (scelto a piacere).

Sol. Autovettori: $(3, -1)$, $(1, 3)$; $\frac{X^2}{42} + \frac{Y^2}{2} = 1$; $(6, -2)$.