◇ Due rette non complanari sono sghembe. [V]

◇ In $\mathbf{R}^5$ possono esistere più di 5 vettori linearmente dipendenti. [V]

◇ Il prodotto scalare di due versori non può essere negativo. [F]

◇ È possibile che un sistema lineare omogeneo non ammetta soluzioni. [F]

⊙ Calcolare la distanza tra l'asse y e il piano di equazione $7x - 1 = 0$. [$\frac{1}{7}$]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(3, 2)$ dell'inversa della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. [$-\frac{1}{3}$]

⊙ Determinare k in modo che il vettore $(2, k, k + 1)$ sia ortogonale all'asse z. [-1]

⊙ Calcolare la seconda coordinata di $(6, 9)$ rispetto alla base $\{(1, 0), (6, 9)\}$. [1]

ooooooooooooooooooooooooooooo

◇ Due rette complanari hanno la stessa giacitura. [F]

◇ In $\mathbf{R}^5$ non possono esistere più di 5 vettori linearmente dipendenti. [F]

◇ Il prodotto scalare di due versori può essere nullo. [V]

◇ Un sistema lineare omogeneo ammette sempre soluzioni. [V]

⊙ Calcolare la distanza tra l'asse x e il piano di equazione $5y - 1 = 0$. [$\frac{1}{5}$]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(3, 1)$ dell'inversa della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. [$-\frac{1}{3}$]

⊙ Determinare k in modo che il vettore $(2, k, k + 1)$ sia ortogonale all'asse y. [0]

⊙ Calcolare la prima coordinata di $(6, 9)$ rispetto alla base $\{(1, 0), (6, 9)\}$. [0]

ooooooooooooooooooooooooooooo

◇ Due rette sghembe ammettono piani simultaneamente paralleli ad esse. [V]

◇ In $\mathbf{R}^5$ possono esistere 4 vettori linearmente indipendenti. [V]

◇ Il prodotto vettoriale di due versori ha lunghezza 1. [F]

◇ Un sistema lineare omogeneo ha tanti parametri quanto il rango. [F]

⊙ Calcolare la distanza tra l'origine e la retta $r : x - 3 = z - 4 = 0$. [5]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(1, 3)$ dell'inversa della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. [$-\frac{1}{3}$]

⊙ Determinare k in modo che il vettore $(0, 2k - 1, 2k + 1)$ sia parallelo all'asse z. [$\frac{1}{2}$]

⊙ Calcolare la seconda coordinata di $(1, 1)$ rispetto alla base $\{(1, 2), (3, 3)\}$. [$\frac{1}{3}$]

ooooooooooooooooooooooooooooo

◇ Due rette incidenti non ammettono piani simultaneamente perpendicolari ad esse. [V]

◇ In $\mathbf{R}^5$ possono esistere al massimo 5 vettori linearmente dipendenti. [F]

◇ Il prodotto vettoriale di due versori ha lunghezza massima 1. [V]

◇ Un sistema lineare omogeneo può avere più parametri del rango. [V]

⊙ Calcolare la distanza tra l'origine e la retta $r : y - 4 = z - 3 = 0$. [5]

⊙ Calcolare il numero nel posto $(1, 2)$ dell'inversa della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. [$-\frac{2}{3}$]

⊙ Determinare k in modo che il vettore $(0, 2k - 1, 3k - 1)$ sia parallelo all'asse y. [$\frac{1}{3}$]

⊙ Calcolare la seconda coordinata di $(1, 1)$ rispetto alla base $\{(1, 0), (1, 1)\}$. [1]

OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x + y + w + z = 6 \\ 2x + 3w - z = 3 \\ 4x + 2y - w + 3z = 9 \end{cases}$.

Cenno della sol. Il rango vale 2, sia per la matrice incompleta che per la completa, quindi abbiamo risolubilità con $4 - 2$ parametri (se il rango vale 3, come accade in un altro esercizio, abbiamo solo 1 parametro).

2. In un riferimento $Oxyz$ sono dati i punti $A = (0, 1, 3)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (-2, 2, 1)$. Stabilire se essi sono allineati. Sia r la retta passante per A e B. Stabilire se r e l'asse z sono sghembe. Determinare i punti di r che sono distanti $\sqrt{94}$ dall'origine O.

Cenno della sol. Occorre confrontare i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$; successivamente si scrivano le equazioni cartesiane di r e si controlli il rango della matrice di ordine 4 che rappresenta il sistema tra r e l'asse z (oppure si mostri che l'intersezione delle due rette è vuota e che i vettori direttori non sono proporzionali); si costruisca infine il punto mobile mediante il vettore $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ e si imponga che la distanza tra i due punti sia quella richiesta.

3. Mediante una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $18x^2 - 8xy + 33y^2 - 34 = 0$ (sugg.: gli autovalori dovranno risultare uguali a 17 e 34).

Cenno della sol. Gli autovettori sono $(4, 1)$ e $(-1, 4)$. Dopo la rotazione si ottiene il polinomio $17X^2 + 34Y^2 - 34 = 0$ e la conseguente forma canonica, dividendo per il termine noto.

4. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (2, 3, 4)$, $f(0, 1, 0) = (2, 3, 4)$ e $f(0, 0, 1) = (0, 0, 5)$. Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine secondo f. Calcolare tutti gli autovettori di f. Stabilire se f è diagonalizzabile. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(2, 2, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ del codominio.

Cenno della sol. La matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio) viene costruita ponendo in colonna le tre immagini date (se invece avessimo equazioni in x, y, z, esse corrisponderebbero alle righe); f non è suriettiva, quindi esistono vettori che non hanno controimmagine (inoltre non è neanche iniettiva). Esistono soltanto 2 autovettori linearmente indipendenti (abbiamo un autovalore con M.A. 2 e M.G. 1), quindi non è possibile diagonalizzare f. La matrice richiesta alla fine ha le colonne uguali alle immagini, ma scritte nelle coordinate secondo la base data. Tale matrice può anche essere ottenuta moltiplicando a sinistra la matrice originale per un'opportuna matrice del cambiamento di coordinate (dalla base canonica alla base data).

5. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(8, 8, 0)$ sul sottospazio di equazione $x - 2y + 3z = 0$ in $\mathbf{R}^3$.

Cenno della sol. Una base del sottospazio consiste di due vettori linearmente indipendenti che soddisfino l'equazione. Essi devono essere ortogonalizzati (se non lo sono già) e infine possiamo calcolare la proiezione come somma delle due singole proiezioni ortogonali. In alternativa, possiamo proiettare il vettore dato sul vettore (a, b, c) del sottospazio, per poi sottrarre il risultato (la componente ortogonale) dal vettore stesso.

6. Determinare i valori di k tali che l'angolo tra la retta $r : 2x - 4ky + 3k = 0$ e l'asse y sia di $60°$.

Cenno della sol. Il coseno dell'angolo tra $(-b, a)$ e un vettore dell'asse y deve essere (in modulo) uguale a $\cos 60°$. Utilizzando la formula del coseno, si trovano due valori di k.