[1] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, ridurre a forma canonica l'iperbole di equazione $24x^2 - 84xy - 11y^2 - 104 = 0$. Calcolare l'eccentricità. Scrivere equazioni cartesiane degli asintoti (nel riferimento iniziale).

**Sol.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{8}Y^2 = 1$; $e = \sqrt{\frac{7}{3}}$; asintoti: $Y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}X$; nelle coordinate originali: $(2x + 3y) = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(3x - 2y)$.

[2] Siano date le rette $r$, $s$ nello spazio $\mathcal{S}$, di rispettive equazioni $x+y = y+z = 0$ e $x-y = z-2 = 0$. Dimostrare che esse non sono complanari. Scrivere un'equazione del piano contenente $r$ e parallelo a $s$. Scrivere equazioni cartesiane della retta che taglia $r$ e $s$ perpendicolarmente.

**Sol.** Il determinante della matrice di ordine 4 non è nullo; piano: $x-y-2z = 0$; possiamo costruire la retta come intersezione dei piani perpendicolari al piano trovato, uno contenente $r$ e l'altro $s$, quindi: $x + y = 0 \wedge x - y + z - 2 = 0$.

[3] Siano dati i vettori $\underline{a} = (3, 0, 0, 1)$, $\underline{b} = (4, 3, 2, 1)$, $\underline{c} = (1, 0, 1, 0)$, $\underline{d} = (k, 1, 0, 0)$, con $k \in \mathbf{R}$. Determinare il valore di $k$ che rende tali vettori linearmente dipendenti. Stabilire se esistono valori di $k$ tali che $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ abbia dimensione 2. Determinare il valore di $k$ che rende $\underline{b}$ ortogonale a $\underline{d}$. Calcolare una base ortogonale di $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ e utilizzarla per calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 0, 2, 2)$ su tale sottospazio.

**Sol.** Per $k = -\frac{1}{3}$ la matrice di ordine 4 ha determinante nullo; $dim(\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle)$ vale 3 in ogni caso, perché la relativa matrice $3 \times 4$ ha rango 3 per ogni valore di $k$; per $k = -\frac{3}{4}$ si annulla il prodotto scalare $\underline{b} \times \underline{d}$; una base ortogonale è ad es. $\{(1, 0, 1, 0), (3, 0, -3, 2), (-1, 33, 1, 3)\}$; proiezione ortogonale: $\frac{1}{25}(18, 6, 32, -4)$. A questo livello, ormai, non si può più moltiplicare il risultato per 25.

[4] Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 2, 2)$, $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$. Stabilire se $f$ è invertibile. Scrivere la matrice di $f$ rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 2, 3)\}$ del codominio.

**Sol.** $\lambda = 0 \Rightarrow \{(2, -1, 0), (1, 0, -1)\}$, $\lambda = 4 \Rightarrow \{(1, 1, 1)\}$; NO perché il rango della matrice (ad es. rispetto alle basi canoniche) non è massimo. Le coordinate delle tre immagini, rispetto alla nuova base, sono rispettivamente $(1, 1, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 0)$; esse formano le colonne della matrice richiesta.

[5] Siano date la retta $r : x - 2y = 0$ e l'ellisse $\mathcal{E} : 5x^2 + 6y^2 = 30$. Determinare i punti di intersezione tra $r$ ed $\mathcal{E}$. Scrivere un'equazione della retta $s$ perpendicolare a $r$ e passante per $(\sqrt{6}, 0)$. Determinare le intersezioni di $s$ con $\mathcal{E}$ e descrivere geometricamente la soluzione trovata.

**Sol.** $\pm\left(2\sqrt{\frac{15}{13}}, \sqrt{\frac{15}{13}}\right)$; $2x + y - 2\sqrt{6} = 0$; $s$ ed $\mathcal{E}$ hanno il punto $(\sqrt{6}, 0)$ in comune (esso è un vertice dell'ellisse); l'altro punto è $\left(\frac{19}{29}\sqrt{6}, \frac{20}{29}\sqrt{6}\right)$.

[6] Determinare i valori di $\alpha$ per i quali il nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, tale che $f(x, y, z) = (x + y + \alpha z, x + \alpha y + z, x + z)$, ha dimensione maggiore di 0. Successivamente, posto $\alpha = 2$, calcolare la matrice inversa della matrice di $f$ relativa alle basi canoniche, e utilizzarla per calcolare la controimmagine di $(\sqrt{2}, \pi^2, 0)$ secondo $f$.

**Sol.** Il rango è minore di 3 se e solo se $\alpha \in \{0, 1\}$ (il determinante si annulla). La matrice inversa è la matrice dell'applicazione inversa, cioè di $f^{-1}$ (sempre nelle basi canoniche); la controimmagine richiesta è quindi il vettore $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} - \pi^2 \\ -\pi^2 \\ -2\sqrt{2} + \pi^2 \end{pmatrix}$.