1. Determinare il valore (o i valori) di $k$ tale che i vettori $(1, 2, 3, k)$, $(1, 0, 2k, 3)$, $(0, 2k, k, -2)$ siano linearmente dipendenti. Successivamente, porre $k = 0$ e calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 3, 0, 0)$ sul sottospazio generato dai tre vettori. Sempre con $k = 0$, scrivere equazioni cartesiane del sottospazio generato dagli ultimi due vettori.

**Sol.** $k = 1$; $\left(0, \frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$; $y = w = 0$.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x, y, w, z) = (x, y + w - 2z)$, determinarne una base del nucleo e una dell'immagine. Scrivere la matrice di $f$ rispetto alla base canonica del dominio e alla base $\{(1, 2), (0, 3)\}$ del codominio. Infine stabilire se $f$ porta coppie di vettori diversi in coppie diverse, per qualunque scelta.

**Sol.** $\{(0, 2, 0, 1), (0, 0, 2, 1)\}$; una base qualunque di $\mathbf{R}^2$ (l'applicazione è infatti suriettiva), ad es. la base canonica; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; l'ultima risposta è NO perché non sussiste l'iniettività.

3. Scrivere un'equazione cartesiana del piano (o dei piani) $\pi'$ perpendicolare al piano $\pi : x - 1 = 0$, passante per $(0, 0, 4)$ e distante 2 da $(1, 0, 0)$ (utilizzare ad es. l'equazione di un piano generico $ax+$ ... e imporre le varie condizioni). Calcolare il seno dell'angolo acuto formato da $\pi$ con la retta $r : x + y = y + 2z = 0$.

**Sol.** $\sqrt{3}y \pm z \mp 4 = 0$; il seno vale $\frac{2}{3}$.

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $4x^2 + 12xy + 9y^2 - \sqrt{13}y = 0$. Determinare l'equazione originale della sua direttrice. Calcolare la lunghezza del segmento ottenuto intersecando la parabola con la bisettrice del II e IV quadrante (sempre nel riferimento $Oxy$).

**Sol.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{13}{2}X^2 - \frac{3}{2}X$; applicando la trasformazione inversa all'equazione della direttrice ruotata ($X = -\frac{1}{8}$), otteniamo: $\frac{1}{\sqrt{13}}(-3x + 2y) = -\frac{1}{8}$; la lunghezza del segmento è $\sqrt{26}$.

5. Data l'applicazione lineare $g$ tale che $g(1, 2) = (0, 3)$ e $g(4, 1) = (1, 9)$, calcolare $g^{-1}(1, 0)$.

**Sol.** $(1, -5)$.

6. Sia data una matrice quadrata di ordine 3 con tutti i valori uguali a 1. Determinare una base di autovettori per l'applicazione lineare che essa rappresenta, rispetto alle basi canoniche. Ripetere l'esercizio con una matrice di ordine 2 che contenga tutti zeri.

**Sol.** $\lambda = 0$ con m.g. 2 e base ad es. $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$; $\lambda = 3$ con autovettore $(1, 1, 1)$; nel secondo caso ogni vettore (a parte quello nullo) è un autovettore ($\lambda = 0$ con m.g. 2).