Nome e Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare sempre le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

1. Sono dati i piani $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$ e $\pi' : x + 2y + 3z = 0$. Calcolare la loro distanza. Scrivere l'equazione del piano perpendicolare a essi e contenente la retta $r : 4x+y+5z-2 = 3x+y+4z-2 = 0$. Stabilire se questa retta è parallela ai due piani dati. Su tale retta, determinare i punti che hanno distanza $\sqrt{6}$ dal punto $(1, 0, 1)$.

Sol. $\frac{6}{\sqrt{14}}$; $5x - 4y + z + 8 = 0$; la retta è parallela ai piani; $P_1 = (0, 2, 0)$, $P_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

2. Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x, 2y + 3z, 4y + 6z)$, determinarne una base di autovettori e scrivere la matrice diagonale risultante da una diagonalizzazione. Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine. Stabilire se esistono vettori non nulli che appartengono al nucleo di f. Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica del codominio e alla base $\{(1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 0, 1)\}$ del dominio.

Sol. $\{(0, 3, -2), (1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$; la relativa matrice diagonale ha 0, 1, 8 sulla diagonale principale; sì, esistono (f non è suriettiva); sì, esistono (f non è iniettiva); la matrice richiesta ha per colonne le tre immagini dei vettori della base data: $(1, 5, 10)$, $(1, 6, 12)$, $(0, 3, 6)$.

3. Calcolare sia la proiezione ortogonale che la componente ortogonale del vettore $(3, 2, 1, 0)$ sul sottospazio di equazioni $2x - y = w - 2z = 0$. Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio ortogonale al sottospazio dato.

Sol. $\left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$; $\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$; $x + 2y = 2w + z = 0$.

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $4xy + 3y^2 - 9 = 0$. Determinare le coordinate originali dei suoi vertici.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{4}{9}X^2 - \frac{1}{9}Y^2 = 1$; applicando la trasformazione ai vertici $\left(\pm\frac{3}{2}, 0\right)$ otteniamo $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

5. Data l'applicazione lineare g tale che $g(3, 1) = (6, 4)$ e $g(3, 2) = (9, 6)$, stabilire se essa ammette autovettori.

Sol. È immediato verificare che $g(3, 2) = 3(3, 2)$, quindi $(3, 2)$ è un autovettore.

6. Utilizzando ad esempio il metodo degli invarianti, calcolare l'eccentricità dell'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$. Determinarne anche il centro.

Sol. Forma canonica: $\frac{X^2}{\frac{11}{2}} + \frac{Y^2}{\frac{11}{4}} = 1$; dunque $e = \sqrt{\frac{1}{2}}$. $C = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$.