Nome e Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare sempre le risposte; consegnare soltanto la bella copia.

1. È data la matrice M quadrata di ordine 4, avente tutti 1 ad eccezione di uno 0 nel posto in basso a destra (4,4) e uno 0 in alto a destra (posto (1,4)). Calcolare il rango di M. Calcolare una base del nucleo dell'applicazione lineare, da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$, che ha M come matrice rispetto alle basi canoniche.

Sol. Il rango vale 2. Una soluzione generale per il nucleo è $(s, t, -s-t, 0)$, da cui è possibile estrarre una base di due vettori.

2. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e perpendicolare ai vettori $(2, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Su tale retta determinare i punti distanti 8 dal piano di equazione $x - z + 2 = 0$.

Sol. Possiamo calcolare il prodotto vettoriale $(-1, -1, 2)$ e poi imporre il passaggio per l'origine, ottenendo: $x - y = 2x + z = 0$. Ora imponiamo che il punto mobile $(t, t, -2t)$ abbia distanza 8 dal piano (mediante la formula della distanza). Otteniamo $\frac{|t+2t+2|}{\sqrt{2}} = 8$ e infine $t = \frac{2 \pm 8\sqrt{2}}{3}$.

3. Calcolare una base ortogonale del sottospazio $S = \langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2), (4, 1, 1, 2) \rangle$. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(0, 1, 0, 1)$ su S. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S. Esibire un vettore che non appartenga a S.

Sol. La dimensione vale 3. Possiamo selezionare due vettori già ortogonali (il secondo e il terzo) e ortogonalizzare ad es. il primo, ottenendo $(1, 0, 0, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) - 0(0, 0, 1, 2)$ che moltiplicato per 2 dà $(1, -1, 0, 0)$; infine la proiezione è uguale a $\left(0, 1, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Imponendo che (x, y, w, z) sia una combinazione lineare dei primi tre vettori dati, otteniamo, mediante il determinante, una sola equazione: $z - 2w = 0$. L'ultima richiesta è soddisfatta da qualunque vettore che abbia $z \neq 2w$.

4. Stabilire se l'origine di un dato riferimento Oxy è allineata con i punti $(2, 1)$, $(4, 1 + \sqrt{3})$, $(-4, 1 - 3\sqrt{3})$.

Sol. NO, ad es. perché il vettore $(2 - 0, 1 - 0)$ non è proporzionale a $(4 - 0, 1 + \sqrt{3} - 0)$.

5. Determinare una rotazione del riferimento tale da portare in forma canonica la parabola di equazione $4x^2 + 28xy + 49y^2 - x\sqrt{53} = 0$. Determinare le coordinate originali del fuoco e un'equazione della direttrice, sempre nel riferimento iniziale.

Sol. Autovettori: $(-7, 2)$, $(2, 7)$. Rotazione: $x = \frac{1}{\sqrt{53}}(2X - 7Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{53}}(7X + 2Y)$. Equazione canonica: $Y = -\frac{53}{7}X^2 + \frac{2}{7}X$. Fuoco nelle nuove coordinate: $\left(\frac{1}{53}, -\frac{45}{1484}\right)$. Utilizzando il cambiamento di coordinate, si ottiene il fuoco originale. Per avere l'equazione della direttrice occorre sostituire la legge inversa, $Y = \frac{1}{\sqrt{53}}(-7x + 2y)$, nell'equazione $Y = \frac{-b^2+4ac-1}{4a}$.

6. Utilizzando direttamente la definizione di autovettore, stabilire se $(2, 1, 3)$ è un autovettore per l'applicazione lineare che porta i vettori della base canonica rispettivamente in $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, $(7, 6, 4)$. Esibire un vettore che non abbia controimmagine per tale applicazione.

Sol. $f(2, 1, 3) = (23, 20, 14)$, quindi non otteniamo un multiplo: non siamo in presenza di un autovettore. Un vettore senza controimmagine deve formare una matrice di rango 3 insieme ai tre vettori dati.

7. Determinare i vettori del tipo $(p, 4)$ che formano un angolo di $60°$ con la retta di equazione $3x - 4y + 7 = 0$.

Sol. Imponiamo che $|(p, 4) \times (4, 3)|$ sia uguale a $\sqrt{p^2 + 16} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$, ottenendo due valori di p.

8. Calcolare la controimmagine di $(2, 3)$ relativamente all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ di cui è noto che $f(2, 1) = (2, 8)$ e $f(0, 1) = (0, 5)$.

Sol. Poiché $(2, 3) = (2, 8) - (0, 5)$, la controimmagine è uguale a $(2, 1) - (0, 1) = (2, 0)$.