**Corso di laurea in Medicina e Chirurgia HT**

 Modulo di **Geometria analitica**

***Diario delle lezioni (a.a. 2020 - 2021)***

**Gio. 15-10-2020 (mattina):** Presentazione del corso. Un importante obiettivo del corso è quello di fornire un linguaggio e un sufficiente rigore nella presentazione e nella gestione dei concetti matematici come matrici, rette e piani (geometria del piano e geometria dello spazio), vettori, sistemi lineari.

Matrici. Definizione generale di matrice. Indici di riga e di colonna. Scrittura di un sistema lineare in forma matriciale (caso di due equazioni in due incognite). Prodotto di matrici, primi esempi. Vettori (matrici particolari, composte da una sola riga o una sola colonna)

**Gio. 15-10 (pomeriggio):** Esercizi vari sul prodotto di matrici. Prodotto scalare tra due vettori. Matrice identità. Matrice inversa, primi esempi. Determinante di una matrice di ordine 2. Formula per la matrice inversa nel caso dell’ordine 2.

**Ven. 16-10:** Utilizzo della matrice inversa per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Il prototipo del metodo è la classica risoluzione di un’equazione ax=b. Ora infatti passiamo dalla dimensione 1 alla dimensione 2. Il ruolo dell’inverso di a è ora interpretato dalla matrice inversa della cosiddetta matrice incompleta [2 per 2] (invece la matrice completa [2 per 3] include anche i termini noti). Sistemi impossibili: non esiste l’inversa, ma con altri metodi (es. sostituzione) si arriva a un assurdo. In altri casi – lo vedremo – esistono sistemi che pur non avendo l’inversa hanno soluzione, anzi infinite soluzioni (sistemi indeterminati).

Al metodo della matrice inversa, analizzato oggi con tutta la dimostrazione, può essere data una veste più semplice, sintetica e facile da memorizzare, mediante la formula di Cramer (lo vedremo).

**Mar. 20-10:** Metodo di Cramer per sistemi con matrice incompleta di ordine 2 e invertibile (cenno della dimostrazione mediante la scrittura esplicita della matrice inversa). Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di ordine 3. Primi cenni alla costruzione della matrice inversa di ordine 3. Sistema "indeterminato" corrispondente a due rette coincidenti.

**Ven. 23-10:** Costruzione della matrice inversa di ordine 3. Per matrici di ordine superiore occorre definire il determinante mediante il teorema di Laplace (approfondimento ancora da trattare). Complementi algebrici. Verifica della correttezza dell’inversa (il prodotto con la matrice originale deve dare la matrice identità di ordine 3). Utilizzo della matrice inversa per risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (metodo di Cramer). Versione sintetica del metodo di Cramer, come nel caso dell’ordine 2 (quoziente di due particolari determinanti).

Discussione informale sul concetto di insieme ordinato. Ordine parziale (impossibilità di con­frontare tutte le coppie di oggetti, come ad esempio la relazione di divisibilità tra numeri naturali). Ordine totale (ad es, la relazione “essere maggiore di”… per i numeri naturali).

Breve discussione sul problema delle soglie e sulla “logica fuzzy” utilizzata per gestire le appros­simazioni insite nei problemi di classificazione. La “tassonomia” aiuta a sistematizzare le informa­zioni ma è una struttura imposta artificialmente.

 *Nota: ho voluto inserire anche queste discussioni ma non saranno argomenti d’esame. Si tratta di approfondimenti facoltativi.*

**Mar. 27-10:** Esempi di sistemi lineari che non possono essere risolti col metodo di Cramer. Se le equazioni sono tre e abbiamo due incognite, la forma della matrice incompleta non è idonea (non è quadrata). Possiamo però provare ad eliminare un’equazione, purché essa sia “combinazione lineare” delle altre due. Se invece ciò non è possibile, il sistema non ammette soluzione (siamo in presenza di tre rette che non hanno un punto in comune; o almeno due sono parallele, o le tre rette formano un triangolo).

Sistemi lineari in tre incognite (intersezioni di “piani”, cenno). Eliminazione di equazioni mediante combinazioni lineari opportune.

**Mar. 03-11:** Metodo generale di riduzione a gradini (metodo di Gauss). Eliminazione di un’equa­zione e conseguente utilizzo di un parametro. Sistemi impossibili (l’ultimo gradino si trova proprio nell’ultima colonna, quella dei termini noti, provocando un assurdo). Primi cenni alla geometria dello spazio. Le equa­zioni lineari in tre incognite rappresentano un piano (da dimostrare nelle prossime lezioni). Esplicitando la z otteniamo una funzione dal piano xy all’asse z. Dobbiamo appunto dimostrare che questa funzione dà luogo a un piano anziché a una qualunque superficie “ondulata” o comunque “non piana”. Ma cosa intendiamo per “piana”?...

**Ven. 06-11:** La corrispondenza tra un’equazione lineare in tre incognite e un determinato *piano nello spazio* scaturirà facilmente da un’analisi di alcuni aspetti della geometria dello spazio. I *vettori geometrici* sono i principali oggetti di studio, sia nella geometria a due dimensioni che nello spazio.

Somma di vettori geometrici e moltiplicazione di un vettore geometrico per un numero reale. Corri­spondenti operazioni per i vettori numerici (già note dall’argomento precedente, sulle combinazioni lineari). Rette nel piano Oxy, vettore direttore e vettore perpen­dicolare. Prodotto scalare e formula del coseno (idea della dimostrazione, passando per il concetto di proiezione ortogonale).

Un’equazione lineare in tre incognite, senza termine noto, esprime dunque la condizione di perpen­dicolarità tra il vettore (a,b,c) e qualunque vettore (x,y,z). Questi vettori (x,y,z) possono essere interpretati come punti, quindi otteniamo un piano passante per l’origine come “insieme dei vettori perpen­dicolari al “chiodo” (a,b,c)” .

**Mar. 10-11:** Approfondimento (video asincrono): il teorema di Binet e la formula di Laplace.

**Ven. 13-10:** Piani non passanti per l’origine (traslazione di piani passanti per l’origine). Equazioni parametriche di una retta nel piano Oxy e nello spazio Oxyz. Eliminazione del parametro per passare alla forma cartesiana (una equazione cartesiana nel piano, due equazioni nello spazio). Le equazioni cartesiane di una retta nello spazio rappresentano l’intersezione di due piani. Procedi­mento inverso: passaggio da equazioni cartesiane a equazioni parametriche.

**Mar. 17-11:** Riepilogo degli argomenti recenti. Risoluzione di esercizi su sistemi lineari, vettori, rette, piani. Prove tecniche su Exam.net relative all’esonero della prossima settimana.

**Mar. 24-11:** Prova scritta online valida per l’esonero.

**Ven. 27-11:** Applicazioni lineari. Le matrici quadrate di ordine 2 possono essere interpretate come funzioni da R2 a R2 . Studio del comportamento di una funzione lineare mediante l’immagine del quadrato unitario. Deformazioni del quadrato. Funzioni non iniettive: collasso della dimensione da 2 a 1. Risolvere un sistema lineare con matrice di ordine 2 equivale a cercare la controimmagine di un dato vettore secondo la data matrice. Rotazioni. Riflessioni.

**Mar. 01-12:** Approfondimento (video asincrono): il determinante e la complanarità di vettori nello spazio. Scrittura dell’equazione di un piano a partire da tre punti di passaggio.

**Ven. 04-12:** Autovettori e autovalori. Cambiamento di coordinate e diagonalizzazione di una matrice M di ordine 2 mediante un opportuno prodotto di matrici C-1MC.

**Ven. 18-12:** Calcolo di autovettori e descrizione geometrica di un’applicazione lineare dal piano *Oxy* a se stesso. Applicazioni lineari prive di autovettori. Autovettori di una funzione tridi­mensionale. Comportamento geometrico di una tale funzione, con l’utilizzo degli autovettori trovati.

**Mar. 12-01-2021:** Approfondimento (video asincrono): la diagonalizzazione, esempio in tre dimensioni.

**Ven. 15-01:** Riepilogo di parti essenziali del corso con commenti e approfondimenti. Schema del cambiamento di coordinate e analogia con la traduzione da una lingua a un’altra.

*• Libro di testo, paragrafi consigliati:*

2.2, 2.3, 3.5,

2.1, 3.3, 3.4, 3.9,

Capitolo 1, 2.5, 2.10, 3.5.