

⊙ Determinare d in modo che il vettore $(2, 1, d)$ sia parallelo al piano di equazione $y + 2z - 5 = 0$. $[-\frac{1}{2}]$

⊙ Calcolare il numero nel posto $(2, 3)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. $[\frac{8}{45}]$

⊙ Calcolare la seconda coordinata di $(1, 2, 3)$ rispetto alla base $\{(2, 4, 6), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$. $[0]$

⊙ Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono l'origine, $(1, \sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, 4, \sqrt{2})$. $[\sqrt{2}]$

⊙ Stabilire se $(1, 2)$ è un autovettore per l'applicazione f definita da $f(x, y) = (3x + y, 8x + y)$. $[\text{sì}]$

⊙ Stabilire se il piano xy è perpendicolare al piano di equazione $x + y - z = 0$. $[\text{no}]$

⊙ Stabilire se un'applicazione lineare che non ha autovettori può essere iniettiva. $[\text{sì}]$

⊙ Stabilire se l'insieme delle matrici invertibili di ordine 2 costituisce un sottospazio delle matrici di ordine 2. $[\text{no}]$

1. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3w + 4z = 10 \\ x - y + w - z = 0 \\ 2x + 7y + 8w + 13z = 30 \end{cases}.$$

Sol. I ranghi sono entrambi uguali a 2, quindi esiste la soluzione e si hanno $4 - 2$ parametri. Una riga è combinazione lineare delle altre. La soluzione generale è ad esempio $(\frac{10-5w-2z}{3}, \frac{10-2w-5z}{3}, w, z)$.

2. Data l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, 0)$, determinarne una base di autovettori. Esibire poi un vettore che non ha controimmagine.

Sol. $\lambda = 0$: $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ (l'autospazio ha dimensione 2 ed è costituito da tutti i vettori del nucleo); $\lambda = 2$: $(1, 1, 0)$. Un vettore qualsiasi che non sia multiplo di $(1, 1, 0)$ non ha controimmagine.

3. Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica la conica di equazione $50x^2 + 8xy + 35y^2 - 17 = 0$. Determinare le coordinate originali di un suo vertice a piacere.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow 2X^2 + 3Y^2 = 1$. Un vertice di questa ellisse (sostituendo il nuovo vertice $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$) è $\frac{1}{\sqrt{51}}(4, 1)$.

4. Tra i punti della retta passante per $(1, 0, 0)$ e $(2, 0, 3)$ determinare quelli distanti 13 dal piano di equazione $x - z - 9 = 0$. Calcolare anche il coseno dell'angolo acuto tra la retta e il piano.

Sol. Il punto mobile sulla retta è ad es. $(1 + t, 0, 3t)$. Imponendo la distanza si trova $t = \pm \frac{13\sqrt{2}-8}{2}$. Il coseno vale $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 0, 1, 0)$ sul sottospazio $T = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 0, 0), (1, 1, 3, 3) \rangle$. Scrivere equazioni cartesiane di T .

Sol. Si noti che $\dim(T) = 2$; ciò facilita la ricerca di una base ortogonale. La proiezione è $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Equazioni: $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$.