Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

⊙ Calcolare la lunghezza del vettore $(1,2,3)\wedge(-1,-2,-3)+(1,2,3)\wedge(2,4,6)$. [0]

⊙ Calcolare il coseno positivo dell'angolo formato dall'asse y con la retta di equazione $x+4y+2=0$. $[\frac{1}{\sqrt{17}}]$

⊙ Calcolare la distanza tra i piani di equazione $x+y+z=0$ e $x+y+z=1$. $[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

⊙ Calcolare il numero di parametri nella soluzione del sistema
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}.\quad [3]$$

⊙ Stabilire se $\{(0,0,x,1)\colon x\in\mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$. [no]

⊙ Stabilire se $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. [no]

⊙ Stabilire se ogni applicazione lineare invertibile ha nucleo uguale allo zero. [sì]

⊙ Stabilire se l'asse x e la retta di equazioni $y-3=z-2=0$ sono parallele. [sì]

1. Tra i piani contenenti la retta r di equazioni $x-y=y-z-8=0$ determinare (con un'equazione cartesiana) quello perpendicolare al vettore $(3,-5,2)$. Inoltre, determinare i punti di r che hanno distanza 10 dall'origine.

Sol. $3x-5y+2z+16=0$. Il punto mobile su r è della forma $(t,t,t-8)$; i valori idonei di t sono $\frac{8\pm2\sqrt{43}}{3}$.

2. Data l'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ tale che $f(1,0,0)=(1,2,3)$, $f(0,1,0)=(1,2,3)$, $f(0,0,1)=(0,0,0)$, determinarne un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti. Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine.

Sol. La matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio) ha per colonne le tre immagini date. $\lambda=0$: $(1,-1,0),(0,0,1)$; $\lambda=3$: $(1,2,3)$. L'assenza di alcune controimmagini equivale alla non suriettività, che a sua volta (nel caso delle applicazioni lineari) equivale alla non coincidenza del rango con la dimensione del codominio. Nel nostro caso abbiamo $1<3$, quindi: SÌ.

3. Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica la conica di equazione $4x^2-20xy+25y^2+\sqrt{29}x=0$. Determinare le coordinate originali del fuoco.

Sol. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\Rightarrow Y=-\frac{29}{5}X^2-\frac{2}{5}X$. Il fuoco di questa parabola (sostituendo il nuovo fuoco $\left(-\frac{1}{29},-\frac{21}{580}\right)$) è $\frac{1}{\sqrt{29}}\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{10}\right)$.

4. Calcolare una base ortogonale del sottospazio S (di $\mathbf{R}^3$) di equazione $x+2y+3z=0$. Utilizzarla per calcolare la proiezione ortogonale di $(0,9,1)$ su S. Calcolare, poi, tale proiezione in modo alternativo, mediante la componente ortogonale.

Sol. $\{(2,-1,0),(3,6,-5)\}$ (si può applicare l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a una base qualunque di questo sottospazio 2-dimensionale). La proiezione è $\left(-\frac{3}{2},6,-\frac{7}{2}\right)$. Lo stesso risultato si ottiene sottraendo la componente ortogonale, $\left(\frac{3}{2},3,\frac{9}{2}\right)$, al vettore dato.

5. Tra i vettori della forma $(2,a,b)$, determinare quello simultaneamente ortogonale a $(1,2,3)$ e a $(2,3,4)$.

Sol. Imponendo che siano nulli i due prodotti scalari, otteniamo un sistema e infine $(2,-4,2)$.