Nome e Cognome : ______________________________ *Num. Matr. :* _______________

Calcolo delle probabilità (16/11/2001)

(Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - Roma)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Da un lotto contenente 5 pezzi buoni e 3 difettosi si estraggono senza restituzione 4 pezzi. Sia X il numero aleatorio di pezzi buoni estratti. Sia inoltre E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*. Calcolare la varianza di X e la probabilità di $E_2 \vee E_3$.

   $Var(X) =$ $P(E_2 \vee E_3) =$

2. Siano date tre urne A (contenente 1 pallina bianca e 1 nera), B (contenente 3 palline bianche) e C (contenente 3 palline nere). Con un procedimento di scelta a caso, una delle due urne B, C (non si sa quale delle due) viene svuotata e le palline in essa contenute vengono inserite in A. Calcolare: 1) la probabilità p che estraendo una pallina da A sia bianca; 2) la probabilità α che le palline inserite in A siano quelle di B, supposto che la pallina estratta da A sia nera.

   $p =$ $\alpha =$

3. L'insieme dei possibili valori di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è il rettangolo $\mathcal{C} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3;\ 0 \leq y \leq 1\}$. La densità congiunta di (X, Y) è la funzione $f(x, y) = (3 - x)y$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare la probabilità p dell'evento $(X > 1, Y \leq \frac{1}{2})$.

   X, Y *indipendenti* ? $p =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)*

Soluzioni del compito del 16/11/2001.

1. X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 8, n = 4, p = \frac{5}{8}$. Pertanto

$$Var(X) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = \frac{15}{28} \cdot$$

Inoltre

$$P(E_2 \vee E_3) = P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3) =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) = \tfrac{5}{8} + \tfrac{5}{8} - \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{4}{7} = \tfrac{25}{28} \cdot$$

2. Le urne B e C hanno entrambe probabilità $\frac{1}{2}$ di essere l'urna che è stata svuotata in A. Sia H l'evento *"In A sono state inserite le palline di B"*; allora $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$. Pertanto, indicando con E l'evento *"La pallina estratta da A è bianca"*, risulta

$$p = P(E) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{5} + \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} \cdot$$

Inoltre, applicando il teorema di Bayes, si ottiene

$$\alpha = P(H|E^c) = \frac{P(E^cH)}{P(E^c)} = \frac{P(H)P(E^c|H)}{1 - P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot$$

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^1 (3-x)ydy = \frac{3-x}{2}\ , \quad 1 \leq x \leq 3; \qquad f_2(y) = \int_1^3 (3-x)ydx = 2y\ , \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Poichè $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall (x,y)$, segue che X e Y sono indipendenti. Inoltre, si ha

$$P(X > 1, Y \leq \frac{1}{2}) = P(X > 1)P(Y \leq \frac{1}{2}) = \int_1^3 \frac{3-x}{2}dx \int_0^{\frac{1}{2}} 2ydy = \cdots = \frac{1}{4} \cdot$$