Nome e Cognome : ______________________________ *Num. Matr. :* _______________

Calcolo delle probabilità (6/12/2001)

(Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - Roma)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. La densità di probabilità $f(x)$ di un numero aleatorio continuo X è così definita:

$$f(x) = \frac{2}{3}x, \quad per \quad 0 \leq x \leq 1; \qquad f(x) = \frac{3-x}{3}, \quad per \quad 1 \leq x \leq 3;$$

con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$ e calcolare la probabilità dell'evento $(\frac{1}{2} \leq X \leq 2)$.

$F(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2) =$

2. Un lotto è costituito da 60 componenti, dei quali 20 sono stati costruiti da una macchina M_1 e 40 da una macchina M_2. Il generico componente risulta difettoso con probabilità $\frac{2}{5}$ se prodotto da M_1 e con probabilità $\frac{1}{5}$ se prodotto da M_2. Dal lotto viene estratto a caso un componente e viene esaminato. Definiti gli eventi $E =$ *"Il pezzo esaminato risulta difettoso"*, $H =$ *"Il pezzo esaminato è stato prodotto dalla macchina M_2"*, calcolare le probabilità $\beta = P(H|E)$ e $\gamma = P(H|E^c)$.

$\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (2,1),\ (2,-1),(3,0)\}$. Calcolare la covarianza di X, Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$Cov(X,Y) =$ $\qquad\qquad$ X, Y *indipendenti* ?

Soluzioni:

1. Per ogni fissato valore reale x, si ha

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{3}, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{6}, & 1 < x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Inoltre

$$P(\tfrac{1}{2} \leq X \leq 2) = \textstyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = F(2) - F(\tfrac{1}{2}) =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{3}{4} \cdot$$

2. Si ha

$$P(H) = \frac{2}{3}\,, \quad P(H^c) = \frac{1}{3}\,, \quad P(E|H) = \frac{1}{5}\,, \quad P(E|H^c) = \frac{2}{5}\,,$$

da cui segue

$$P(E) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \cdot$$

Pertanto

$$\beta = P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{2} \cdot$$

Inoltre, osservando che $P(E^c|H) = 1 - P(E|H) = \frac{4}{5}$, $P(E^c) = 1 - P(E) = \frac{11}{15}$, si ottiene

$$\gamma = P(H|E^c) = \frac{P(E^cH)}{P(E^c)} = \frac{P(E^c|H)P(H)}{P(E^c)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{15}} = \frac{8}{11} \simeq 0.73\,.$$

3. Si ha $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{6}$, $\forall (x, y) \in \mathcal{C}$. Inoltre $X \in \{0, 1, 2, 3\}$; $Y \in \{-1, 0, 1\}$; $XY \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; con

$$P(X = 0) = \tfrac{1}{6},\ P(X = 1) = P(X = 2) = \tfrac{1}{3},\ P(X = 3) = \tfrac{1}{6},$$

$$P(Y = -1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = \tfrac{1}{3},$$

$$P(XY = -2) = P(XY = -1) = P(XY = 1) = P(XY = 2) = \tfrac{1}{6},\ P(XY = 0) = \tfrac{1}{3},$$

da cui segue, per le previsioni di X, Y, XY, rispettivamente $m_X = \frac{3}{2}$, $m_Y = m_{XY} = 0$. Allora

$$Cov(X, Y) = m_{XY} - m_X m_Y = 0\,.$$

Pertanto X e Y sono incorrelati. Inoltre, osservando ad esempio che

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\,,$$

segue che X e Y non sono indipendenti.