Calcolo delle probabilità (9/4/2002)

(Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - Roma)

1. Dati tre eventi A, B, C, con $(A \vee B) \wedge C = \emptyset$, sia $X = |A| + |B| - |C|$. Supposto $P(A) = P(B) = P(B|A) = 0.5, P(A^c B^c C^c) = \frac{1}{8}$ calcolare la probabilitá dell'evento C e, per ogni possibile valore x di X, la probabilitá p_x dell'evento $(X = x)$.

$$P(C) = \qquad ; \qquad \begin{cases} x : \quad , \quad , \quad , \quad , \\ p_x : \quad , \quad , \quad , \quad , \end{cases}$$

2. Sia dato un vettore aleatorio continuo $(X, Y) \in Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3\}$, con densità congiunta $f(x, y) = \frac{4}{81}xy$, per $(x, y) \in Q$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la covarianza della coppia $X + Y, X - Y$ e la probabilità p dell'evento $(Y - X > 0)$.

$$Cov(X + Y, X - Y) = \qquad ; \quad p =$$

3. Due macchine simili A e B producono pezzi dello stesso tipo. Ciascun pezzo prodotto da A (rispettivamente da B) è difettoso, indipendentemente dagli altri pezzi, con probabilitá $p_1 = \frac{1}{5}$ (rispettivamente $p_2 = \frac{1}{4}$). Un lotto è composto da 100 pezzi, dei quali 60 costruiti da A e 40 da B. Sia X (rispettivamente Y) il numero di pezzi difettosi fra quelli prodotti da A (rispettivamente da B). Calcolare la previsione m_{X+Y} di $X + Y$, la probabilità α_0 che i 100 pezzi del lotto siano tutti non difettosi e la probabilità p dell'evento condizionato $(X = 1 \mid X + Y = 1)$.

$$m = \qquad ; \quad \alpha_0 = \qquad ; \quad p =$$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)*

Soluzioni del compito del 9/4/2002.

1. Si ha:

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = 0.25\,, \quad P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.75\,.$$

Allora

$$P(C) = 1 - P(A \vee B) - P(A^c B^c C^c) = 1 - 0.75 - 0.125 = 0.125\,.$$

Inoltre, i costituenti sono:

$$ABC^c = AB\,, \quad AB^cC^c = AB^c\,, \quad A^cBC^c = A^cB\,, \quad A^cB^cC = C\,, \quad A^cB^cC^c\,,$$

ai quali corrispondono i seguenti valori di X:

$$2\,, \; 1\,, \; 1\,, \; -1\,, \; 0\,.$$

Pertanto, per le probabilità p_x si ottiene:

$$\begin{cases} x: \quad -1\,, \quad 0\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \\ p_x: \quad 0.125\,, \quad 0.125\,, \quad 0.5\,, \quad 0.25\,. \end{cases}$$

2. Si ha:

$$f_1(x) = \int_0^3 \tfrac{4}{81} xy dy = \tfrac{2}{9} x\,, \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$f_2(y) = \int_0^3 \tfrac{4}{81} xy dx = \tfrac{2}{9} y\,, \quad 0 \leq y \leq 3.$$

Pertanto $f_1 = f_2$ e, in particolare, $Var(X) = Var(Y)$. Allora

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0.$$

Inoltre

$$P(Y - X > 0) = p = \int_0^3 dx \int_x^3 \frac{4}{81} xy dy = \int_0^3 \frac{2}{81} x(9 - x^2) dx = \int_0^3 \frac{2}{9} x dx - \int_0^3 \frac{2}{81} x^3 dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Si ha

$$X \sim B(60, \frac{1}{5})\,, \qquad Y \sim B(40, \frac{1}{4})\,,$$

da cui segue

$$m_{X+Y} = m_X + m_Y = 60 \cdot \frac{1}{5} + 40 \cdot \frac{1}{4} = 12 + 10 = 22\,.$$

Inoltre

$$\alpha_0 = P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0) = (1 - \frac{1}{5})^{60} (1 - \frac{1}{4})^{40} = (\frac{4}{5})^{60} (\frac{3}{4})^{40} = \frac{3^{40} \cdot 4^{20}}{5^{60}}\,.$$

Infine

$$p = P(X = 1 \mid X+Y=1) = \frac{P(X=1, X+Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(X=1,Y=0) + P(X=0,Y=1)} =$$

$$= \frac{P(X=1)P(Y=0)}{P(X=1)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=1)} = \frac{60 \frac{1}{5} (\frac{4}{5})^{59} (\frac{3}{4})^{40}}{60 \frac{1}{5} (\frac{4}{5})^{59} (\frac{3}{4})^{40} + (\frac{4}{5})^{60} 40 \frac{1}{4} (\frac{3}{4})^{39}} = \frac{9}{25}\,.$$