CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 14 settembre 2002
(Ing. Ambiente e Territorio, Roma)

Nome: Matr.:

Motivare dettagliatamente le risposte su fogli allegati

1. Dato un numero aleatorio X, con distribuzione normale standard, e posto $Y = 2X+1$, calcolare $P(Y \geq 1)$. Inoltre, posto $Z = Y + 2$, calcolare la covarianza di Y, Z e la probabilità p dell'evento: $(Z+1)(Z-7) \leq 0$.

   $P(Y \geq 1) =$ $\qquad$ $cov(Y, Z) =$ $\qquad$ $p =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = kxy$, per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $y \in [0, 2]$, la funzione di ripartizione $F_2(y)$. Stabilire, inoltre, se X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad$ $F_2(y) =$ $\qquad$ $X\ ,\ Y\ \ St.\ Indip.?$

3. Un lotto di 6 componenti identici, uno dei quali è difettoso, viene diviso in due gruppi A e B, formati rispettivamente da 4 e 2 componenti. Vengono esaminati a caso 2 componenti del gruppo A e 1 del gruppo B. Definiti gli eventi $H =$ *"il componente difettoso sta nel gruppo B"*, $E =$ *"uno dei 3 componenti esaminati è quello difettoso"*, calcolare $P(E)$ e $P(H|E^c)$. Stabilire, inoltre, se E ed H sono stocasticamente indipendenti.

   $P(E) =$ $\qquad$ $P(H|E^c) =$ $\qquad$ $E, H\ \ st.\,indip.?$

Soluzioni.

1. Si ha
$$Y \sim N_{1,2}\ , \quad Z \sim N_{3,2}\,.$$
Allora
$$P(Y \geq 1) = 1 - \Phi_{1,2}(1) = 1 - \Phi(\frac{1-1}{2}) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}\,.$$
Inoltre
$$cov(Y,Z) = cov(Y, Y+2) = var(Y) = 4\,.$$
Infine
$$p = P[(Z+1)(Z-7) \leq 0] = P(-1 \leq Z \leq 7) = \Phi_{3,2}(7) - \Phi_{3,2}(-1) =$$
$$= \Phi(\tfrac{7-3}{2}) - \Phi(\tfrac{-1-3}{2}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544\ .$$

2. Dev'essere
$$\int_0^1 \int_0^2 f(x,y)dxdy = 1\,,$$
cioè
$$k\int_0^1 \int_0^2 xydxdy = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,,$$
e quindi $k = 1$. Inoltre, per $y < 0$, si ha: $F_2(y) = 0$, mentre, per $y > 2$, si ha: $F_2(y) = 1$.
Per $0 \leq y \leq 2$, si ha
$$F_2(y) = \int_0^y f_2(t)dt\,.$$
Allora, essendo
$$f_2(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 xydx = \frac{y}{2}\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,,$$
con $f_2(y) = 0$ altrove, segue
$$F_2(y) = \int_0^y \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^y = \frac{y^2}{4}\,.$$
Infine
$$f_1(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \int_0^2 xydy = 2x\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora
$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = xy\ , \quad \forall\ (x,y) \in [0,1]\times[0,2]\ ,$$
con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti.

3. Si ha
$$P(H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,,\ P(H^c) = \frac{2}{3}\,,\ P(E|H) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{0}}{\binom{2}{1}} = \frac{1}{2}\,,\ P(E|H^c) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$
Allora
$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,.$$
Inoltre, osservando che $P(E^c|H) = 1 - P(E|H) = \frac{1}{2}$, si ha
$$P(H|E^c) = \frac{P(E^cH)}{P(E^c)} = \frac{P(E^c|H)P(H)}{1-P(E)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(H)\,.$$
Si noti che da $P(H|E^c) = P(H)$ segue $P(H|E) = P(H)$, pertanto E ed H sono stocasticamente indipendenti.