Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 15/4/2003)

1. Da un lotto L_1, contenente 2 pezzi buoni e 4 difettosi, vengono prelevati a caso due pezzi e inseriti in un lotto L_2, contenente inizialmente 1 pezzo buono e 1 difettoso. Sia H_r l'evento "r dei due pezzi prelevati da L_1 sono buoni", $r = 0, 1, 2$. Successivamente, da L_2 viene estratto un pezzo. Supposto che tale pezzo sia buono (evento E), calcolare la probabilità α che i due pezzi prelevati da L_1 fossero uno buono e uno difettoso (evento H_1).

   $$\alpha = P(H_1|E) =$$

2. Un numero aleatorio X ha distribuzione normale con parametri $m = 2, \sigma = 3$. Posto $Y = X - 4$, $Z = \frac{X+Y}{2}$, calcolare $Cov(X, Y)$ e la probabilità $p = P(Z \geq -3)$.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

3. In un'urna ci sono 6 palline: tre bianche, due nere e una rossa. Si effettuano due estrazioni senza restituzione. Siano definiti gli eventi:
   $B_i =$ "la i-ma pallina estratta è bianca", $i = 1, 2$;
   $N_j =$ "la j-ma pallina estratta è nera", $j = 1, 2$;
   $R_k =$ "la k-ma pallina estratta è rossa", $k = 1, 2$.
   Calcolare $P(B_1 R_2)$ e $P(N_2)$.

   $P(B_1 R_2) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(N_2) =$

4. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è data da $f(x, y) = ax + y$ per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e (utilizzando il valore trovato per a) la funzione di ripartizione $F_1(x)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $F_1(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Amb. Terr. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 15/4/2003.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{6}{2}} = \tfrac{6}{15}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \tfrac{8}{15}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{4}{0}\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \tfrac{1}{15}\,;$$

$$P(E|H_0) = \tfrac{1}{4}\,, \qquad P(E|H_1) = \tfrac{2}{4}\,, \qquad P(E|H_2) = \tfrac{3}{4}\,.$$

Allora

$$\alpha = P(H_1|E) = \frac{P(H_1)P(E|H_1)}{P(H_0)P(E|H_0) + P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2)} = \frac{\frac{8}{15}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{6}{15}\cdot\frac{1}{4} + \frac{8}{15}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{16}{25}\,.$$

2. Si ha

$$Cov(X,Y) = Cov(X, X-4) = Cov(X,X) = Var(X) = 9\,.$$

Inoltre

$$Z = \frac{X + X - 4}{2} = X - 2 \;\sim\; N_{0,3}\,,$$

quindi

$$p = P(Z \geq -3) = 1 - P(Z \leq -3) = 1 - \Phi_{0,3}(-3) = \Phi_{0,3}(3) = \Phi(1) \simeq 0.8413\,.$$

3. Si ha

$$P(B_1R_2) = P(B_1)P(R_2|B_1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}\,.$$

Inoltre

$$P(N_2) = P(N_2N_1) + P(N_2N_1^c) = P(N_1)P(N_2|N_1) + P(N_1^c)P(N_2|N_1^c) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{3} = P(N_1)\,.$$

4. Dev'essere

$$\int\int_T f(x,y)dxdy = 1\,,$$

quindi

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (ax+y)dy = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - a) = 1\,,$$

da cui segue $a = 5$. Inoltre, per $x \in [0,1]$, si ha

$$f_1(x) = \int_0^{1-x} (5x+y)dy = \cdots = -\frac{9}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t)dt = \cdots = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}\,.$$