Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 25/2/2004)

1. Dati due lotti L_1 ed L_2, ciascuno contenente 3 componenti buoni e 1 difettoso, da entrambi si effettuano 2 estrazioni con restituzione, ottenendo X pezzi difettosi fra quelli estratti da L_1 ed Y pezzi difettosi fra quelli estratti da L_2. Considerato il numero aleatorio discreto $Z = X + Y$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di Z.

   $m =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è data da $f(x) = \frac{x}{9}$, per $0 \leq x \leq 3$, $f(x) = \frac{1}{3}$, per $3 \leq x \leq a$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di ripartizione $F(x)$, per ogni $x > 3$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$

3. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 4 nere si effettuano 4 estrazioni senza restituzione. Tizio vince una somma S se almeno una delle prime due palline è bianca (evento A); Caio vince una somma analoga se almeno una delle ultime due palline è bianca (evento B). Calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno dei due vinca la somma S; (ii) la probabilità α che Tizio abbia vinto il premio, supposto che uno solo dei due abbia vinto il premio.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi A e B in parallelo funzionanti simultaneamente. Siano X e Y i tempi aleatori di durata di A e B, rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 2e^{-x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità γ che A si guasti prima di B.

   $\gamma =$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma*)
Soluzioni della prova scritta del 25/2/2004.

1. Osserviamo che X e Y sono indipendenti ed ugualmente distribuiti, con distribuzione binomiale di parametri $n = 2, p = \frac{1}{4}$. Pertanto
$$I\!P(X) = I\!P(Y) = np = \frac{1}{2}\,, \quad Var(X) = Var(Y) = npq = \frac{3}{8}\,,$$
$$m = I\!P(Z) = I\!P(X) + I\!P(Y) = 1\,, \quad \sigma = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{Var(X) + Var(Y)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

2. Calcoliamo la costante a.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 \frac{x}{9}dx + \int_3^a \frac{1}{3}dx = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{a-3}{3} = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{9}{2}\,.$$
Allora, per $x \in (3, \frac{9}{2})$, si ha: $F(x) = \int_0^3 \frac{t}{9}dt + \int_3^x \frac{1}{3}dt = \frac{1}{2} + \frac{x-3}{3} = \frac{2x-3}{6}\,.$

Per $x \geq \frac{9}{2}$, si ha: $F(x) = \int_0^3 \frac{t}{9}dt + \int_3^{\frac{9}{2}} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

3. Definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-ma estrazione esce pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3, 4$, si ha
$$A^c = E_1^c E_2^c\,, \quad B^c = E_3^c E_4^c\,, \quad A^c B^c = E_1^c E_2^c E_3^c E_4^c\,,$$
e quindi
$$p = P(A \vee B) = 1 - P(A^c B^c) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c E_4^c) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{15}\,.$$
In altro modo: $p = P(A \vee B) = 1 - P(E_5 E_6) = 1 - P(E_1 E_2) = 1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{15}$.
Inoltre
$$AB^c = (E_1 \vee E_2) \wedge E_3^c E_4^c = E_1 E_3^c E_4^c \vee E_2 E_3^c E_4^c\,, \quad A^c B = (E_3 \vee E_4) \wedge E_1^c E_2^c = E_1^c E_2^c E_3 \vee E_1^c E_2^c E_4\,,$$
ed osservando che, per ogni $i \neq j \neq k$, si ha $P(E_i^c E_j^c E_k) = P(E_1^c E_2^c E_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$, segue
$$P(AB^c) = P(E_1 E_3^c E_4^c) + P(E_2 E_3^c E_4^c) - P(E_1 E_2 E_3^c E_4^c) = \cdots = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3}\,,$$
$$P(A^c B) = P(E_1^c E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2^c E_4) - P(E_1^c E_2^c E_3 E_4) = \cdots = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3}\,,$$
e quindi
$$\alpha = P(A \,|\, AB^c \vee A^c B) = \frac{P(AB^c)}{P(AB^c \vee A^c B)} = \frac{P(AB^c)}{P(AB^c) + P(A^c B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,.$$

4. Ricordando che, per ogni $\lambda > 0$, $x \geq 0$, si ha
$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1\,, \quad \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x}\,,$$
segue
$$\gamma = P(X < Y) = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_x^{+\infty} 2e^{-2y}dy =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = \frac{1}{3}\,.$$