Probabilità e Statistica *(Ing. Amb. Terr. - Latina* - 14/7/2004)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Stabilire per quale valore della costante c la funzione $f(x) = c$, per $x \in [0, c]$, $f(x) = \frac{8}{27}$, per $x \in (c, c+3]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Determinare quindi la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$c = \qquad\qquad F(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \end{cases}$$

2. Un componente prelevato a caso da un lotto $\mathcal{A}$, contenente 1 pezzo difettoso e 2 non difettosi, viene inserito in un lotto $\mathcal{B}$, contenente inizialmente 3 pezzi non difettosi, dal quale successivamente si tolgono a caso 2 pezzi. Calcolare: (i) la probabilità p che i 2 pezzi estratti da $\mathcal{B}$ siano entrambi non difettosi (evento E); (ii) la probabilità γ che i 2 pezzi rimasti in $\mathcal{A}$ siano non difettosi (evento H), supposto vero E.

$p =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. La funzione di ripartizione di un numero aleatorio X, continuo e non negativo, è $F(x) = 1 - e^{-3x}$, per $x \geq 0$, con $F(x) = 0$ altrove. Posto $Y = 2X + 1$, calcolare la previsione di Y e la probabilità p dell'evento $(5 \leq Y \leq 11)$.

$\mathbb{P}(Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di sopravvivenza $S_Y(y)$ e la funzione di rischio $h_Y(y)$, per $y > 1$.

$S_Y(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_Y(y) =$

5. Un sistema S è costituito da due dispositivi A e B in parallelo, funzionanti simultaneamente, i cui tempi aleatori di durata X e Y sono indipendenti e con densità

$$f_1(x) = 2e^{-2x}\,,\ x \geq 0\,,\ f_1(x) = 0\,,\ x < 0\,; \qquad f_2(y) = 3e^{-3y}\,,\ y \geq 0\,,\ f_2(y) = 0\,,\ y < 0\,.$$

Calcolare la probabilità p che A si guasti dopo B. Inoltre, determinare, per ogni $z > 0$, la densità di probabilità $g(z)$ del tempo fino al guasto Z di S.

$p =$ $\qquad\qquad$ $g(z) =$

6. Dati due lotti L_1 ed L_2, ciascuno contenente 6 componenti buoni e 2 difettosi, da entrambi si effettuano 3 estrazioni con restituzione, ottenendo X pezzi difettosi fra quelli estratti da L_1 ed Y pezzi difettosi fra quelli estratti da L_2. Calcolare la funzione caratteristica $\phi_Z(t)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

$\phi_Z(t) =$

7. Dati tre eventi scambiabili A, B, C, con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$, $P(ABC) = \frac{1}{12}$, calcolare $P(B^cC)$ e $P(AB^cC)$.

$P(B^cC) =$ $\qquad\qquad$ $P(AB^cC) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 14/7/2004.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del quadrato di vertici $(0,0),(c,0),(c,c),(0,c)$, pari a c^2, più quella del rettangolo di vertici $(c,0),(c+3,0),(c+3,\frac{8}{27}),(0,\frac{8}{27})$, pari a $\frac{8}{9}$, dev'essere unitaria e quindi: $c^2 = \frac{1}{9}$, da cui segue $c = \frac{1}{3}$.
Allora, per la funzione di ripartizione, si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$, ed $F(x) = 1$, per $x \geq \frac{10}{3}$.
Inoltre
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{x}{3}\,, \quad 0 < x \leq \frac{1}{3}\,;$$
$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^x \frac{8}{27}\,dt = \frac{1}{9} + \frac{8}{27}(x - \frac{1}{3}) = \frac{24x+1}{81}\,, \quad \frac{1}{3} < x < \frac{10}{3}\,.$$

2. Si ha
$$P(H) = \frac{1}{3}\,, \quad P(E|H) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,, \quad P(E|H^c) = 1\,;$$
pertanto
$$p = P(E) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{5}{6}\,;$$
$$\gamma = P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}\,.$$

3. X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$; quindi $\mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$. Pertanto
$$\mathbb{P}(Y) = 2\mathbb{P}(X) + 1 = 2\cdot\frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}\,.$$
Inoltre
$$p = P(5 \leq Y \leq 11) = P(5 \leq 2X{+}1 \leq 11) = P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = e^{-6} - e^{-15} \simeq 0.0025\,.$$

4. Fissato $y > 1$, si ha
$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(2X+1 > y) = P\left(X > \frac{y-1}{2}\right) = S_X\left(\frac{y-1}{2}\right) = e^{-\frac{3(y-1)}{2}}\,.$$
Inoltre, indicando con g la densità di Y e osservando che $g(y) = -S'_Y(y)$, si ha
$$h_Y(y) = -\frac{S'_Y(y)}{S_Y(y)} = -\frac{-\frac{3}{2}e^{-\frac{3(y-1)}{2}}}{e^{-\frac{3(y-1)}{2}}} = \frac{3}{2}\,, \ \forall\, y > 1\,.$$

5. Si ha

$$p = P(X > Y) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^x f_1(x) f_2(y) dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}(1 - e^{-3x})dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx - \tfrac{2}{5}\int_0^{+\infty} 5e^{-5x}dx = 1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5}\,.$$

Inoltre, per ogni $z > 0$, si ha

$$P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = (1-e^{-2z})(1-e^{-3z}) = 1-e^{-2z}-e^{-3z}+e^{-5z}\,,$$

da cui segue: $g(z) = 2e^{-2z} + 3e^{-3z} - 5e^{-5z}$.

6. X ed Y sono indipendenti ed ugualmente distribuiti, con distribuzione binomiale di parametri $n = 3, p = \frac{1}{4}$. Pertanto

$$\phi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \cdots = \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{3}{4}\right)^3 = \phi_Y(t)\,,$$

e quindi

$$\phi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \left(\frac{e^{it}}{4} + \frac{3}{4}\right)^6\,.$$

7. Per l'ipotesi di scambiabilità, si ha

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}\,; \quad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{2}{9}\,.$$

Allora

$$P(B^cC) = P(C)-P(BC) = \frac{1}{2}-\frac{2}{9} = \frac{5}{18}\,; \quad P(AB^cC) = P(AC)-P(ABC) = \frac{2}{9}-\frac{1}{12} = \frac{5}{36}\,.$$