

Nome:

Matr.:

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. Terr. - Roma - 24/4/2004)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x) = \frac{2x}{a} + 2$, per $x \in [-a, 0]$, $f(x) = -\frac{2x}{a} + 2$, per $x \in (0, a]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Determinare quindi la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$a = \quad F(x) = \left\{ \begin{array}{l} , \\ , \\ , \\ , \end{array} \right.$$

2. Dati tre eventi A, B, C si supponga $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C|B) = \frac{1}{3}$, $P(A|BC) = \frac{3}{5}$. Calcolare $P(ABC)$ e $P(A^cBC)$.

$$P(ABC) =$$

$$P(A^cBC) =$$

3. Un sistema S è costituito da due moduli \mathcal{A} ed M in serie, con M costituito da due dispositivi \mathcal{B}, \mathcal{C} in parallelo funzionanti simultaneamente. I tempi aleatori X, Y, Z di durata fino al guasto di $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono stocasticamente indipendenti e hanno tutti distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Indicando, per un fissato $t > 0$, con A l'evento " \mathcal{A} si guasta dopo l'istante t " (e analogamente per \mathcal{B} e \mathcal{C}), calcolare la probabilità α dell'evento $E =$ "il sistema si guasta dopo l'istante t ". Inoltre, calcolare la probabilità β dell'evento condizionato $E|A$.

$$\alpha =$$

$$\beta =$$

4. Un'azienda produce componenti, ognuno dei quali è difettoso con probabilità 0.05. La qualità dei componenti è controllata con un'apparecchiatura \mathcal{A} che con probabilità 0.99 classifica buono un pezzo, supposto che sia buono, e con probabilità 0.98 classifica difettoso un pezzo, supposto che sia difettoso. Siano definiti, in relazione all'esame di un singolo componente, gli eventi $H =$ "il componente esaminato è difettoso", $E =$ "il componente esaminato è classificato difettoso". Calcolare la percentuale p di pezzi classificati difettosi dall'apparecchiatura \mathcal{A} . Inoltre, supposto che un pezzo sia stato classificato difettoso, calcolare la probabilità γ che tale pezzo sia difettoso.

$$p =$$

$$\gamma =$$

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. Terr. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 24/4/2004.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del triangolo di vertici $(-a, 0)$, $(0, 2)$, $(a, 0)$, pari a $2a$, dev'essere unitaria e quindi: $a = \frac{1}{2}$. Allora, per la funzione di ripartizione, si ha $F(x) = 0$, per $x \leq -\frac{1}{2}$, ed $F(x) = 1$, per $x \geq \frac{1}{2}$. Inoltre

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x (4t + 2)dt = \left[2t^2 + 2t\right]_{-\frac{1}{2}}^x = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0;$$

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (4t + 2)dt + \int_0^x (-4t + 2)dt = \frac{1}{2} + \left[-2t^2 + 2t\right]_0^x = -2x^2 + 2x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

2. Si ha

$$P(ABC) = P(BCA) = P(B)P(C|B)P(A|BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$

Inoltre

$$P(A^cBC) = P(BC) - P(ABC) = P(B)P(C|B) - P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

3. Si ha $E = A \wedge (B \vee C)$, con A, B, C stocasticamente indipendenti e con

$$P(A) = P(B) = P(C) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \alpha &= P(E) = P[A \wedge (B \vee C)] = P(AB \vee AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = \\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = e^{-2t}(2 - e^{-t}). \end{aligned}$$

Inoltre, osservando che $AE = E$, si ha

$$\beta = P(E|A) = \frac{P(AE)}{P(A)} = \frac{P(E)}{P(A)} = \frac{e^{-2t}(2 - e^{-t})}{e^{-t}} = e^{-t}(2 - e^{-t}) = P(B \vee C).$$

(Infatti: $P(E|A) = P[A \wedge (B \vee C)|A] = P[(B \vee C)|A] = P(B \vee C)$)

4. Si ha $P(H) = 0.05$, $P(E|H) = 0.98$, $P(E^c|H^c) = 0.99$ e quindi

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = 0.98 \times 0.05 + 0.01 \times 0.95 = 0.0585;$$

pertanto la percentuale di pezzi classificati difettosi è $p = 5.85\%$. Inoltre

$$\gamma = P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{0.98 \times 0.05}{0.0585} = 0.8376.$$