Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 23/7/2004)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x)$ definita sotto è una densità di probabilità. Determinare quindi la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ a, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \\ 0, & altrove \end{cases} \qquad a = \qquad F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

2. Un lotto L di composizione incognita contiene 4 componenti, i quali sono tutti buoni (ipotesi H), oppure 3 buoni e 1 difettoso (ipotesi H^c). Dal lotto L si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Supposto H ed H^c equiprobabili e definiti gli eventi: $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare: $P(E_3)$; $P(H|E_1E_2)$; $P(E_3|E_1E_2)$.

$P(E_3) =$ $\qquad$ $P(H|E_1E_2) =$ $\qquad$ $P(E_3|E_1E_2) =$

3. Un sistema S è costituito da due dispositivi A e B in parallelo, funzionanti simultaneamente, con tempi aleatori di durata X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$k =$ $\qquad$ X, Y *indipendenti?*

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione m_Z e la funzione di rischio $h(z)$ del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S.

$m_Z =$ $\qquad$ $h(z) =$

5. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 1$, sia $Z = X + Y$. Calcolare $p = P(Z > 1)$, $\gamma = P(X = 1 \,|\, Z = 2)$.

$p =$ $\qquad$ $\gamma =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare $Cov(Z, 2X - 3Y)$ e la funzione caratteristica $\phi_Z(t)$.

$Cov(Z, 2X - 3Y) =$ $\qquad$ $\phi_Z(t) =$

7. La densità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. La componente X_i di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_6)$ ha, per ogni fissato valore θ di Θ, una densità condizionata $f(x_i|\theta) = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}$ per $x_i \geq 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove, $i = 1, \ldots, 6$. Supposto di aver osservato un campione casuale $x = (x_1, \ldots, x_6) = (2, 5, 6, 9, 8, 7)$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(x|\theta)$ e la densità finale $\beta(\theta|x)$.

$\alpha(x|\theta) =$ $\qquad$ $\beta(\theta|x) =$

Soluzioni

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; quindi

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} a\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{a}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{a}{3} = 1\,;$$

allora: $a = 2$.
Per la funzione di ripartizione, si ha $F(x) = 0$, per $x \le 0$, ed $F(x) = 1$, per $x \ge 1$. Inoltre

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{x}{2}\,, \quad 0 < x \le \frac{1}{3}\,;$$

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{x} 2\,dt = \frac{1}{6} + 2(x - \frac{1}{3}) = 2x - \frac{1}{2}\,, \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\,;$$

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2\,dt + \int_{\frac{2}{3}}^{x} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}) = \frac{x+1}{2}\,, \quad \frac{2}{3} < x < 1\,.$$

2. Si ha: $P(E_3) = P(E_3|H)P(H) + P(E_3|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}\,;$

inoltre: $P(E_1E_2|H) = 1\,, \quad P(E_1E_2|H^c) = P(E_1|H^c)P(E_2|H^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}\,,$
da cui segue

$$P(H|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2|H)P(H)}{P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{16}{25}\,;$$

infine

$$P(E_3|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c)}{P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{27}{64}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{91}{100}\,.$$

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1\,;$ ovvero

$$k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-2y}\,dxdy = \frac{k}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy = \frac{k}{2} = 1\,;$$

quindi: $k = 2$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = e^{-x}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\,dy = e^{-x}\,,\ x \ge 0\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove;

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 2e^{-2y}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2e^{-2y}\,,\ y \ge 0\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ \forall\,(x,y)\,,$ e quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Indicando con G e g la funzione di ripartizione e la densità di probabilità di Z, si ha

$$G(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) =$$

$$= (1 - e^{-z})(1 - e^{-2z}) = 1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z}\,,\ z \geq 0\,,$$

con $G(z) = 0$ altrove, da cui segue: $g(z) = e^{-z} + 2e^{-2z} - 3e^{-3z}\,, z \geq 0\,,$ con $g(z) = 0$ altrove. Allora

$$m_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} zg(z)dz = \int_0^{+\infty} ze^{-z}dz + \int_0^{+\infty} 2ze^{-2z}dz - \int_0^{+\infty} 3ze^{-3z}dz = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}\,.$$

Inoltre: $S(z) = 1 - G(z) = e^{-z} + e^{-2z} - e^{-3z}\,,\ z \geq 0\,,$ con $S(z) = 1$ altrove, da cui segue

$$h(z) = \frac{g(z)}{S(z)} = \frac{e^{-z} + 2e^{-2z} - 3e^{-3z}}{e^{-z} + e^{-2z} - e^{-3z}} = \frac{e^{2z} + 2e^{z} - 3}{e^{2z} + e^{z} - 1}\,,\ z \geq 0\,,$$

con $h(z) = 0$ altrove.

5. Si ha: $P(X = h) = P(Y = h) = \frac{\lambda^h}{h!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-1}}{h!}\,,\ \ h = 0, 1, \ldots;$

$$P(Z = 0) = P(X + Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = e^{-1}e^{-1} = e^{-2}\,;$$

$$P(Z = 1) = P(X + Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) =$$

$$= P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1) = e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1} = 2e^{-2}\,.$$

Allora

$$p = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - 3e^{-2}\,.$$

Inoltre

$$P(Z = 2) = P(X + Y = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) =$$

$$= P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) =$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{-1}e^{-1} + \tfrac{1}{2}e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1} = 2e^{-2}\,,$$

e quindi

$$\gamma = P(X = 1 \,|\, Z = 2) = \frac{P(X = 1, Z = 2)}{P(Z = 2)} = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Z = 2)} = \frac{e^{-2}}{2e^{-2}} = \frac{1}{2}\,.$$

6. Si ha $Var(X) = Var(Y) = 1$; allora: $Cov(Z, 2X - 3Y) = Cov(X + Y, 2X - 3Y) =$

$$= 2Cov(X, X) - 3Cov(X, Y) + 2Cov(Y, X) - 3Cov(Y, Y) = 2Var(X) - 3Var(Y) = -1\,.$$

Inoltre: $\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)\,,$ con $\phi_X(t) = \phi_Y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} e^{ith}\,\frac{e^{-1}}{h!} = e^{e^{it}-1}\,,$

da cui segue: $\phi_Z(t) = e^{2(e^{it}-1)}$; (*infatti* $Z \sim \mathcal{P}(2)$).

7. Osserviamo intanto che $\beta(\theta) = G_{1,1}(\theta)$. Inoltre, per la funzione di verosimiglianza si ha

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)f(x_3|\theta)f(x_4|\theta)f(x_5|\theta)f(x_6|\theta) =$$

$$= 2\theta^2e^{-2\theta} \cdot 5\theta^2e^{-5\theta} \cdot 6\theta^2e^{-6\theta} \cdot 9\theta^2e^{-9\theta} \cdot 8\theta^2e^{-8\theta} \cdot 7\theta^2e^{-7\theta} = 30240\theta^{12}e^{-37\theta}\,.$$

Infine

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k_1(x)\theta^{12}e^{-38\theta} = G_{13,38}(\theta)\,;$$

ovvero, la densità finale è una Gamma di parametri $c = 13, \lambda = 38$.