Nome: Matr.:

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 24/4/2004)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati tre eventi A, B, C si supponga $P(C) = \frac{2}{3}$, $P(A|C) = \frac{3}{4}$, $P(B|AC) = \frac{2}{5}$. Calcolare $P(ABC)$ e $P(AB^cC)$.

   $P(ABC) =$ $P(AB^cC) =$

2. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x) = \frac{3x}{a} + 3$, per $x \in [-a, 0]$, $f(x) = -\frac{3x}{a} + 3$, per $x \in (0, a]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Determinare quindi la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$

3. Un'azienda produce componenti, ognuno dei quali è buono con probabilità 0.9. La qualità dei componenti è controllata con un'apparecchiatura $\mathcal{M}$ che con probabilità 0.95 classifica buono un pezzo, supposto che sia buono, e con probabilità 0.98 classifica difettoso un pezzo, supposto che sia difettoso. Siano definiti, in relazione all'esame di un singolo componente, gli eventi $K =$ *"il componente esaminato è buono"*, $F =$ *"il componente esaminato è classificato buono"*. Calcolare la percentuale α di pezzi classificati buoni dall'apparecchiatura $\mathcal{M}$. Inoltre, supposto che un pezzo sia stato classificato buono, calcolare la probabilità β che tale pezzo sia buono.

   $\alpha =$ $\beta =$

4. Un sistema S è costituito da due moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}$ in serie, con $\mathcal{M}$ costituito da due dispositivi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ in parallelo funzionanti simultaneamente. I tempi aleatori X, Y, Z di durata fino al guasto di $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono stocasticamente indipendenti e hanno tutti distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Indicando, per un fissato $t > 0$, con A l'evento *"$\mathcal{A}$ si guasta dopo l'istante t"* (e analogamente per $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$), calcolare la probabilità p dell'evento $E =$ *"il sistema si guasta dopo l'istante t"*. Inoltre, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $E|C$.

   $p =$ $\gamma =$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma*)

Soluzioni della prova scritta del 24/4/2004.

1. Si ha
$$P(ABC) = P(CAB) = P(C)P(A|C)P(B|AC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,.$$
Inoltre
$$P(AB^cC) = P(AC) - P(ABC) = P(C)P(A|C) - P(ABC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}\,.$$

2. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del triangolo di vertici $(-a, 0), (0, 3), (a, 0)$, pari a $3a$, dev'essere unitaria e quindi: $a = \frac{1}{3}$.
Allora, per la funzione di ripartizione, si ha $F(x) = 0$, per $x \leq -\frac{1}{3}$, ed $F(x) = 1$, per $x \geq \frac{1}{3}$. Inoltre
$$F(x) = \int_{-\frac{1}{3}}^{x} (9t + 3)dt = \left[\frac{9}{2}t^2 + 3t\right]_{-\frac{1}{3}}^{x} = \frac{9}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}\,, \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq 0\,;$$
$$F(x) = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} (9t+3)dt + \int_{0}^{x} (-9t+3)dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{9}{2}t^2 + 3t\right]_{0}^{x} = -\frac{9}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}\,, \quad 0 < x < \frac{1}{3}\,.$$

3. Si ha $P(K) = 0.9\,,\ P(F|K) = 0.95\,,\ P(F^c|K^c) = 0.98$ e quindi
$$P(F) = P(F|K)P(K) + P(F|K^c)P(K^c) = 0.95 \times 0.9 + 0.02 \times 0.1 = 0.857\,;$$
pertanto la percentuale di pezzi classificati buoni è $\alpha = 85.7\%$. Inoltre
$$\beta = P(K|F) = \frac{P(FK)}{P(F)} = \frac{P(F|K)P(K)}{P(F)} = \frac{0.95 \times 0.9}{0.857} = 0.9977\,.$$

4. Si ha $E = (A \vee B) \wedge C$, con A, B, C stocasticamente indipendenti e con
$$P(A) = P(B) = P(C) = \int_{t}^{+\infty} 2e^{-2x}dx = e^{-2t}\,.$$
Allora
$$p = P(E) = P[(A \vee B) \wedge C] = P(AC \vee BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) =$$
$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = e^{-4t}(2 - e^{-2t})\,.$$
Inoltre, osservando che $CE = E$, si ha
$$\gamma = P(E|C) = \frac{P(CE)}{P(C)} = \frac{P(E)}{P(C)} = \frac{e^{-4t}(2 - e^{-2t})}{e^{-2t}} = e^{-2t}(2 - e^{-2t}) = P(A \vee B)\,.$$
(*Infatti:* $P(E|C) = P[(A \vee B) \wedge C|C] = P[(A \vee B)|C] = P(A \vee B)$)