Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 19/6/2004)

1. Stabilire per quale valore della costante a la funzione $f(x) = a$, per $x \in [-a, 0]$, $f(x) = \frac{1}{4}$, per $x \in (0, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Determinare quindi la funzione di ripartizione $F(x)$.

$a =$ $$F(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \end{cases}$$

2. La funzione di ripartizione di un numero aleatorio X, continuo e non negativo, è $F(x) = 1 - e^{-x}$, per $x \geq 0$, con $F(x) = 0$ altrove. Posto $Y = 2X$, calcolare la previsione di Y e la probabilità p dell'evento $(-4 \leq Y \leq 6)$.

$\mathbb{P}(Y) =$ $p =$

3. In una data popolazione, composta da 100.000 individui, 10 sono affetti da una malattia M. Una persona scelta a caso nella popolazione viene sottoposta ad un controllo con un'apparecchiatura $\mathcal{A}$ che con probabilità 0.99 classifica sano un individuo, supposto che tale individuo sia sano, e con probabilità 0.98 classifica malato l'individuo, supposto che sia malato. Definiti gli eventi $H =$ *"l'individuo esaminato è malato"*, $E =$ *"l'individuo esaminato è classificato malato dall'apparecchiatura"*, calcolare la probabilità p che la persona esaminata sia classificata malata dall'apparecchiatura $\mathcal{A}$. Inoltre, supposto che l'individuo sia stato classificato malato, calcolare la probabilità γ che egli sia malato.

$p =$ $\gamma =$

4. Tizio, prima di lasciare una località L, attende fino ad un fissato istante $\tau \in (0, 1)$ l'arrivo di quattro amici. Supposto che tali amici arrivino in istanti aleatori T_1, T_2, T_3, T_4, indipendenti e con distribuzione uniforme in $[0, 1]$, e definiti gli eventi

$$E_1 = (T_1 \leq \tau)\,, \quad E_2 = (T_2 \leq \tau)\,, \quad E_3 = (T_3 \leq \tau)\,, \quad E_4 = (T_4 \leq \tau)\,,$$

calcolare la probabilità α che Tizio, prima di lasciare L, incontri soltanto tre dei quattro amici. Inoltre, posto $X = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4|$, determinare la distribuzione di probabilità di X.

$\alpha =$ $X \sim$

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. Terr. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 19/6/2004.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero, in termini geometrici, l'area del quadrato di vertici $(-a,0),(0,0),(0,a),(-a,a)$, pari ad a^2, più quella del rettangolo di vertici $(0,0),(3,0),(3,\frac{1}{4}),(0,\frac{1}{4})$, pari a $\frac{3}{4}$, dev'essere unitaria e quindi: $a^2 = \frac{1}{4}$, da cui segue $a = \frac{1}{2}$.
Allora, per la funzione di ripartizione, si ha $F(x) = 0$, per $x \leq -\frac{1}{2}$, ed $F(x) = 1$, per $x \geq 3$.
Inoltre, per $-\frac{1}{2} < x \leq 0$, si ha
$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{2}\, dt = \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{2x+1}{4}\,;$$
per $0 < x < 3$, si ha
$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{2}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4} + \frac{x}{4}\,.$$

2. X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$; pertanto
$$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1\,, \quad \mathbb{P}(Y) = 2\mathbb{P}(X) = 2\,.$$
Inoltre
$$p = P(-4 \leq Y \leq 6) = P(-2 \leq X \leq 3) = P(0 \leq X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-3} \simeq 0.95\,.$$

3. Si ha $P(H) = 0.0001\,,\ P(E|H) = 0.98\,,\ P(E^c|H^c) = 0.99$ e quindi
$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = 0.98 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.9999 \simeq 0.0101\,;$$
in altri termini, la percentuale di persone classificate malate è 1.01%. Inoltre
$$\gamma = P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{0.98 \times 0.0001}{0.0101} \simeq 0.0097\,.$$
(*Come si vede, nonostante che l'apparecchiatura A sia molto affidabile, la probabilità che l'individuo, classificato malato da A, lo sia effettivamente è minore dell'*1%)

4. $T_1, \ldots, T_4$ hanno la stessa densità di probabilità f, data da
$$f(x) = 1\,,\ x \in [0,1]\,; \quad f(x) = 0\,,\ x \notin [0,1]\,.$$
Quindi
$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \int_0^{\tau} f(x)\, dx = \tau\,.$$
Pertanto, essendo $E_1, \ldots, E_4$ indipendenti, segue
$$\alpha = P(E_1E_2E_3E_4^c \vee E_1E_2E_3^cE_4 \vee E_1E_2^cE_3E_4 \vee E_1^cE_2E_3E_4) =$$
$$= P(E_1E_2E_3E_4^c) + P(E_1E_2E_3^cE_4) + P(E_1E_2^cE_3E_4) + P(E_1^cE_2E_3E_4) = 4\tau^3(1-\tau)\,.$$
Infine, essendo $E_1, \ldots, E_4$ indipendenti ed equiprobabili, si ha $X \sim B(4,\tau)$.