Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 21/9/2004)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Da un cassetto contenente 5 chiavi, delle quali al massimo una può aprire una serratura, se ne estraggono in blocco 2. Definiti gli eventi $H =$ *"il cassetto contiene la chiave che apre la serratura"*, $E =$ *"nessuna delle 2 chiavi estratte dal cassetto apre la serratura"*, si ponga $P(H) = p_0$, $P(H|E) = p_2$. Calcolare: (i) $P(E)$; (ii) i valori di p_0 tali che $p_2 > \frac{1}{2}$.

   $P(E) =$ $\qquad\qquad$ $p_0 \in$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme nell'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x(2 - x)\}$. Calcolare: (i) la densità marginale $f_1(x)$; (ii) la funzione di rischio $h_1(x)$ di X, per ogni $x \in (0, 2)$.

   $f_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare: (i) la probabilità γ dell'evento condizionato $(X \geq 1 \,|\, X \geq Y)$; (ii) la densità condizionata $f_2(y|x)$, per un fissato $x \in (0, 2)$.

   $\gamma =$ $\qquad\qquad$ $f_2(y|x) =$

4. Siano dati due lotti, L_1 contenente 2 pezzi difettosi e 3 non difettosi ed L_2 contenente 3 pezzi difettosi e 4 non difettosi. Da L_1 si effettuano 2 estrazioni con restituzione ottenendo X pezzi non difettosi; successivamente, si effettuano 3 estrazioni con restituzione da L_2 ottenendo Y pezzi non difettosi. Sia E_i l'evento *"il pezzo estratto nell'i-ma prova è non difettoso"*, $i = 1, \ldots, 5$. Calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno dei 5 pezzi estratti sia non difettoso; (ii) la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

5. Un sistema S, costituito da due moduli in serie M_1, M_2, dev'essere utilizzato in un dato intervallo di tempo $[0, T]$. M_1 è formato da 2 dispositivi in parallelo D_1, D_2, mentre M_2 è formato da 3 dispositivi in parallelo D_3, D_4, D_5. Definiti gli eventi $E_i =$ *"il dispositivo D_i funziona senza guastarsi nell'intervallo $[0, T]$"*, $i = 1, \ldots, 5$, e supposto che tali eventi siano indipendenti e tutti di probabilità $p = 1 - q$, calcolare la probabilità α che S funzioni senza guastarsi nell'intervallo $[0, T]$. Inoltre, indicando con X_1, X_2 i tempi aleatori fino al guasto di D_1, D_2 e supposto che X_1, X_2 siano indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$, calcolare per ogni $y > 0$ la funzione di sopravvivenza $S_Y(y)$ del tempo aleatorio Y fino al guasto di M_1 (*nota: utilizzare gli eventi* $A_i = (X_i > y)$, $i = 1, 2$).

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $S_Y(y) =$

6. Un'urna U di composizione incognita contiene 4 palline, che sono tutte nere (ipotesi H), oppure 1 bianca e 3 nere (ipotesi H^c). Da U si effettuano 3 estrazioni senza restituzione ottenendo pallina bianca un numero aleatorio X di volte ($X \in \{0, 1\}$). Supposto H ed H^c equiprobabili e definiti gli eventi: $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la previsione m e la funzione di ripartizione F di X.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$

7. La densità iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è normale di parametri $m_0 = 0, \sigma_0 = 5$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, X_2, X_3)$ hanno, per ogni fissato valore θ di Θ, una stessa densità $f(x|\theta)$ normale di parametri $m = \theta, \sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $x = (x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 4)$, calcolare la previsione m_3 e lo scarto quadratico medio σ_3 di $\Theta|x$.

   $m_3 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_3 =$

1. Si ha $P(E|H) = \dfrac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(E|H^c) = 1\,$, da cui segue:

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{3}{5}\,p_0 + 1 - p_0 = 1 - \frac{2}{5}\,p_0\,.$$

Inoltre

$$p_2 = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{3}{5}\,p_0}{1 - \frac{2}{5}\,p_0} > \frac{1}{2} \iff p_0 > \frac{5}{8}\,.$$

2. Indicando con k il valore costante (da determinare) della densità congiunta, si ha

$$f_1(x) = \int_0^{x(2-x)} k\,dy = kx(2-x)\,, \quad 0 \le x \le 2\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Inoltre

$$\int_0^2 f_1(x)dx = k\int_0^2 x(2-x)dx = \cdots = \frac{4}{3}\,k = 1\,,$$

da cui segue $k = \frac{3}{4}$ e quindi $f_1(x) = \frac{3}{4}\,x(2-x)$ per $x \in [0,2]$, con $f_1(x) = 0$, altrove. Infine, fissato $x \in (0,2)$, si ha

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^2 f_1(t)dt = \int_x^2 \frac{3}{4}\,t(2-t)dt = \cdots = \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 1\,,$$

con $S_1(x) = 0$ per $x \ge 2$. Allora, per ogni $x \in (0,2)$, si ha

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{\frac{3}{4}\,x(2-x)}{\frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4} + 1} = \frac{6x - 3x^2}{x^3 - 3x^2 + 4}\,.$$

3. Si osservi che $(X \ge 1)$ implica $(X \ge Y)$; pertanto $(X \ge 1\,,\, X \ge Y) = (X \ge 1)$. Allora

$$\gamma = \frac{P(X \ge 1\,,\, X \ge Y)}{P(X \ge Y)} = \frac{P(X \ge 1)}{P(X \ge Y)}\,,$$

con

$$P(X \ge 1) = \int_1^2 f_1(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{4}\,x(2-x)\,dx = \cdots = \frac{1}{2}\,,$$

(*come si potrebbe anche intuire in base a considerazioni di simmetria*) e con

$$P(X \ge Y) = 1 - P(X < Y) = 1 - \int_0^1 dx \int_x^{x(2-x)} \frac{3}{4}\,dy = \cdots = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\,.$$

Pertanto: $\gamma = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$.
Ricordiamo che: $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$; con $f(x,y) = \frac{3}{4}$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, e con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, per $x \in (0,2)$, si ha: $(x,y) \in \mathcal{C} \iff 0 \le y \le x(2-x)$. Pertanto, fissato $x \in (0,2)$, si ha

$$f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x(2-x)}, & 0 \le y \le x(2-x), \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

In conclusione, $Y|x$ ha una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, x(2-x)]$.

4. $E_1, \ldots, E_5$ sono stocasticamente indipendenti e quindi:

$$p = P(X+Y>0) = 1 - P(X+Y=0) = 1 - P(E_1^c \cdots E_5^c) =$$
$$= 1 - P(E_1^c) \cdots P(E_5^c) = \cdots = 1 - (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{7})^3 \simeq 0.9874\,.$$

Si ha: $X \sim B(2, \frac{3}{5})$, $Y \sim B(3, \frac{4}{7})$; quindi

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{3}{5}\,e^{it} + \frac{2}{5}\right)^2, \quad \varphi_Y(t) = \left(\frac{4}{7}\,e^{it} + \frac{3}{7}\right)^3.$$

Allora, osservando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, segue

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(\frac{3}{5}\,e^{it} + \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\,e^{it} + \frac{3}{7}\right)^3.$$

5. Si ha

$$\alpha = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4 \vee E_5)] = P(E_1 \vee E_2)P(E_3 \vee E_4 \vee E_5) =$$
$$= [1 - P(E_1^c E_2^c)][1 - P(E_3^c E_4^c E_5^c)] = [1 - P(E_1^c)P(E_2^c)][1 - P(E_3^c)P(E_4^c)P(E_5^c)] =$$
$$= (1-q^2)(1-q^3) = 1 - q^2 - q^3 + q^5\,.$$

Inoltre, considerati gli eventi $A_i = (X_i > y)$, $i = 1, 2$, con $y > 0$, si ha:

$$P(A_i) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-y}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Allora

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(A_1 \vee A_2) = \cdots = 2e^{-y} - e^{-2y}\,.$$

6. Osservando che $X \in \{0, 1\}$ e posto $A = (X = 1)$, si ha

$$X \;=\; |E_1| + |E_2| + |E_3| \;=\; 0 \cdot |A^c| + 1 \cdot |A|\,;$$

quindi $m = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = P(A)$. Essendo E_1, E_2, E_3 equiprobabili, con

$$P(E_i) = P(E_1) = P(E_1|H)P(H) + P(E_1|H^c)P(H^c) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\,,$$

segue: $m = \frac{3}{8} = P(A)$. Inoltre

$$P(X=1) = P(A) = \frac{3}{8}\,, \quad P(X=0) = 1 - P(X=1) = \frac{5}{8}\,.$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{5}{8}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

7. La distribuzione finale di Θ è normale di parametri m_3, σ_3, con

$$m_3 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{3}{\sigma^2} \cdot \overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2}}\,, \qquad \frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{25} + 3 = \frac{76}{25}\,, \qquad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 2\,.$$

Pertanto: $m_3 = \frac{75}{38}$, $\quad \sigma_3 = \frac{5}{\sqrt{76}}$.