Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 25/9/2004)

1. Di 5 chiavi, una sola delle quali apre una certa serratura, 3 prese a caso sono inserite in un cassetto $\mathcal{A}$ e le rimanenti 2 in un cassetto $\mathcal{B}$. Successivamente, da $\mathcal{B}$ si estrae a caso una chiave. Definiti gli eventi $H =$ *"$\mathcal{B}$ contiene la chiave che apre la serratura"*, $E =$ *"la chiave estratta da $\mathcal{B}$ non apre la serratura"*, calcolare: (i) $P(E)$; (ii) $P(H \mid E)$.

   $P(E) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P(H \mid E) =$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme su $\mathcal{C} = [0, 2] \times [0, 2]$. Calcolare le funzioni di ripartizione F_X, F_Y e la probabilità dell'evento condizionato $A|B$, con $A = (X - Y < 0)$, $B = (X < 1)$.

   $F_X(x) = \Bigg\{$ $\qquad\qquad\qquad$ $F_Y(y) = \Bigg\{$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(A|B) =$

3. Sia X un numero aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 5/6, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

   Determinare il suo codominio $\mathcal{C}_X$ e la probabilità degli eventi $\{X = 2\}$ e $\{X = 4\}$.

   $\mathcal{C}_X =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(X = 2) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(X = 4) =$

4. Un numero aleatorio continuo X ha la seguente funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x - x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

   Calcolare la previsione e la varianza di X.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Var(X) =$

Calcolo delle probabilità (Ing. Amb. Terr. - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 25/9/2004.

1. Si ha

$$P(H) = \frac{2}{5}, \quad P(E|H) = \frac{1}{2}, \quad P(E|H^c) = 1,$$

da cui segue:

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Inoltre

$$P(H \mid E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

2. L'area di $\mathcal{C}$ è pari a 4; pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora

$$F_X(x) = \int_0^x du \int_0^2 \frac{1}{4}\, dy = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

con $F_X(x) = 0$, per $x < 0$, ed $F_X(x) = 1$, per $x > 2$. Con un ragionamento analogo si trova che $F_Y = F_X$, ovvero $F_Y(y) = \frac{y}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2$, con $F_Y(y) = 0$, per $y < 0$, ed $F_Y(y) = 1$, per $y > 2$.
Infine

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\int_0^1 dx \int_x^2 \frac{1}{4}\, dy}{\int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{4}\, dy} = \cdots = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

3. Si ha $\mathcal{C}_X = \{0, 2, 3, 5\}$, con $P(X = 2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
Inoltre, considerati due valori a, b, con $3 \leq a < 4 \leq b < 5$, dalla relazione

$$(X = 4) \subset (a < X \leq b),$$

segue

$$P(X = 4) =\leq P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0;$$

pertanto: $P(X = 4) = 0$.

4. X ha la seguente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2(2-2x)dx = \left[\frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{4}\,x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,;$$

quindi

$$Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}\,.$$