Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 15/12/2004)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $(x, y) \in I\!R^2$. Calcolare la varianza σ_Z^2 e la funzione caratteristica $\phi_Z(t)$ del numero aleatorio $Z = X+Y$.

   $\sigma_Z^2 =$ $\phi_Z(t) =$

2. Siano dati due lotti: $\mathcal{A}$ contenente 1 pezzo difettoso e 2 non difettosi, $\mathcal{B}$ contenente 2 pezzi difettosi e 1 non difettoso. Da uno dei due lotti si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Sia p la probabilità che venga utilizzato il lotto A (ipotesi H) ed E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$. Calcolare il valore di p tale che $P(E_i) = \frac{1}{2}$ e, utilizzando tale valore di p, la probabilità $\alpha = P(E_iE_j)$, con $i \neq j$.

   $p =$ $\alpha =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare: 1) la probabilità β che sia stato utilizzato il lotto A, supposto vero l'evento $E_1E_2E_3$; 2) la probabilità γ dell'evento condizionato $(E_3 \mid E_1E_2)$.

   $\beta =$ $\gamma =$

4. La funzione di rischio di un numero aleatorio continuo non negativo X è $h(x) = 3$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(X > 5 \mid X > 4)$.

   $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$ $p =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y) \in \mathcal{C} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq \frac{x}{2}\}$ è $f(x, y) = ke^{-(x+y)}$, $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la previsione m di X.

   $k =$ $m =$

6. La funzione caratteristica di un numero aleatorio discreto X è $\phi(t) = (\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^8$. Calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di X.

   $m =$ $\sigma =$

7. La densità iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = 9\theta e^{-3\theta}$, $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$ hanno, per ogni fissato valore θ di Θ, una stessa densità $f(x_i|\theta) = e^{-\theta x_i}, x_i \geq 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove, $i = 1, 2, 3, 4$. Supposto di aver osservato un campione casuale $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 3, 6, 2)$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(x \mid \theta)$ e la densità finale $\beta(\theta \mid x)$.

   $\alpha(x \mid \theta) =$ $\beta(\theta \mid x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/12/2004.

1. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = N(x), \quad f_2(y) = \cdots = N(y).$$

Inoltre $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x,y)$; pertanto X e Y hanno una distribuzione normale standard e sono stocasticamente indipendenti; quindi sono anche incorrelati. Allora

$$\sigma_Z^2 = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Infine: $\phi_X(t) = \phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{-t^2}$.

(*Nota:* $Z \sim N_{0,\sqrt{2}}$).

2. Gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili. Allora, per ogni $i = 1, 2, 3$, si ha

$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c) = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{p+1}{3} = \frac{1}{2} \iff p = \frac{1}{2}.$$

Inoltre, per ogni $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$, si ha

$$P(E_iE_j) = P(E_iE_j|H)P(H) + P(E_iE_j|H^c)P(H^c) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

3. Si ha

$$\beta = P(H \,|\, E_1E_2E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3 \,|\, H)P(H)}{P(E_1E_2E_3 \,|\, H)P(H) + P(E_1E_2E_3 \,|\, H^c)P(H^c)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{2}} = \frac{8}{9}.$$

Inoltre

$$\gamma = P(E_3 \,|\, E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{P(E_1E_2E_3 \,|\, H)P(H) + P(E_1E_2E_3 \,|\, H^c)P(H^c)}{P(E_1E_2 \,|\, H)P(H) + P(E_1E_2 \,|\, H^c)P(H^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

4. Si ha

$$S(x) = P(X > x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-3x}, \quad x \geq 0,$$

con $S(x) = 1$ per $x < 0$. Allora

$$F(x) = 1 - S(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$P(X > 5 \,|\, X > 4) = \frac{P(X > 5\,, X > 4)}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 4)} = \frac{S(5)}{S(4)} = \frac{e^{-15}}{e^{-12}} = e^{-3}\,.$$

5. Dev'essere $\int\int_{\mathcal{C}} f(x,y)dxdy = 1$; ovvero, tenendo conto che $\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-\frac{x}{2}}$ e che $\int_0^{+\infty} \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}\,x}dx = 1$, dev'essere

$$k\int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy = k\int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{2}{3}k\int_0^{+\infty}\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}\,x}dx = \frac{2}{3}k = 1\,,$$

da cui segue: $k = \frac{3}{2}$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty}\frac{3}{2}\,e^{-(x+y)}dy = \cdots = \frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}\,x}\,, \quad x \geq 0\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; pertanto X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{3}{2}$. Allora: $m = \mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{3}$.

6. Il numero aleatorio X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 8, p = \frac{3}{4}$; pertanto

$$m = \mathbb{P}(X) = np = 6\,, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

In alternativa, ricordando che $\phi^{(k)}(0) = i^k\mathbb{P}(X^k)$ e osservando che

$$\phi'(t) = 6ie^{it}(\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^7\,, \quad \phi''(t) = 6i^2e^{it}(\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^7 + \frac{63}{2}i^2e^{2it}(\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^6\,,$$

segue

$$\phi'(0) = 6i = i\mathbb{P}(X)\,, \quad \phi''(0) = -6 - \frac{63}{2} = -\frac{75}{2} = -\mathbb{P}(X^2)\,.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = m = 6\,, \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{P}(X^2) - m^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

7. Si ha

$$\alpha(x\,|\,\theta) = f(x_1|\theta)\cdots f(x_4|\theta) = e^{-\theta\sum_{i=1}^4 x_i} = e^{-12\,\theta}\,;$$
$$\beta(\theta\,|\,x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x\,|\,\theta) = k_1(x)\,\theta\,e^{-3\,\theta}e^{-12\,\theta} = 225\,\theta\,e^{-15\,\theta} = G_{2,15}(\theta)\,.$$

Nota: la distribuzione iniziale di Θ è una Gamma di parametri $c_0 = 2, \lambda_0 = 3$; quella finale è ancora una Gamma di parametri $c_4 = 2, \lambda_4 = 15$. Pertanto

$$k_1(x) = \frac{\lambda_4^{c_4}}{\Gamma(c_4)} = \frac{15^2}{1!} = 225\,.$$