Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 21/2/2005)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Siano dati tre eventi A, B, C, con $AB \neq \emptyset$, $AC = BC = \emptyset$, $P(A) = P(B) = P(B|A) = \frac{1}{2}$, $P(C) = p$. Calcolare: (i) i costituenti e, per ogni costituente C_h, la sua probabilità α_h, assumendo $p = \frac{1}{5}$; (ii) il valore di p tale che $P(C \mid A \vee B \vee C) = \frac{1}{7}$.

   costituenti : , , , , , $p =$
   probabilità : , , , , ,

2. Cinque amici $a_1, \dots, a_5$ si danno appuntamento, arrivando a caso in una località L nell'intervallo $[0, 2]$. Sia, per ogni i, T_i l'istante aleatorio di arrivo di a_i in L e si supponga che $T_1, \dots, T_5$ siano stocasticamente indipendenti (e con distribuzione uniforme in $[0, 2]$). Definiti gli eventi $E_i = (\frac{1}{2} \leq T_i \leq \frac{3}{2})$, $i = 1, \dots, 5$, calcolare la probabilità γ che almeno uno dei 5 amici arrivi in L nell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Inoltre, posto $X = |E_1| + \cdots + |E_5|$, determinare la probabilità $p_h = P(X = h)$ per ogni possibile valore h.

   $\gamma =$ $p_h =$

3. Sia R il rettangolo $[0, 2] \times [0, 3]$. La densità di probabilità di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{6}$ per $(x, y) \in R$, con$f(x, y) = 0$ per $(x, y) \notin R$. Determinare la previsione e la varianza del numero aleatorio $3X - 2Y$.

   $\mathbb{P}(3X - 2Y) =$ $Var(3X - 2Y) =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, definiti gli eventi $A = (2Y - 3X \leq 0)$, $B = (3X + 2Y \leq 6)$, $C = (Y \leq \frac{3}{2})$, stabilire se gli eventi sono equiprobabili e se A B sono stocasticamente indipendenti.

   Equiprob. ? *A, B stoc. indip.* ?

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma*)

Soluzioni della prova scritta del 21/2/2005.

1. Dalle relazioni logiche segue che i costituenti sono:

$$ABC^c = AB\,, \quad AB^cC^c = AB^c\,, \quad A^cBC^c = A^cB\,, \quad A^cB^cC = C\,, \quad A^cB^cC^c\,.$$

Per le probabilità dei costituenti si ha

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4}\,, \; P(AB^c) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{4}\,, \; P(A^cB) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(C) = p = \frac{1}{5}\,, \quad P(A^cB^cC^c) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}\,.$$

Inoltre

$$P(C\,|\,A \vee B \vee C) = \frac{P(C)}{P(A \vee B \vee C)} = \frac{p}{\frac{3}{4} + p} = \frac{1}{7} \iff p = \frac{1}{8}\,.$$

2. La densità di probabilità di $T_1, \ldots, T_5$ è $f(t) = \frac{1}{2}$ per $t \in [0, 2]$, con $f(t) = 0$ altrove. Pertanto

$$P(E_i) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\,, \quad i = 1, \ldots, 5\,.$$

Allora, essendo $E_1, \ldots, E_5$ stocasticamente indipendenti, segue

$$\gamma = P(E_1 \vee \cdots \vee E_5) = 1 - P(E_1^c \cdots E_5^c) = 1 - P(E_1^c) \cdots P(E_5^c) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}\,.$$

Inoltre, essendo X la somma di 5 eventi indipendenti ed equiprobabili di probabilità $\frac{1}{2}$, si ha $X \sim B(5, \frac{1}{2})$ e quindi

$$p_h = \binom{5}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^h \left(\frac{1}{2}\right)^{5-h} = \frac{\binom{5}{h}}{2^5}\,, \quad h = 0, 1, \ldots, 5\,.$$

3. Si ha

$$f_1(x) = \cdots = \frac{1}{2}\,,\; 0 \leq x \leq 2\,; \quad f_1(x) = 0\,,\; \textit{altrove}\,;$$

$$f_2(y) = \cdots = \frac{1}{3}\,,\; 0 \leq y \leq 3\,; \quad f_2(y) = 0\,,\; \textit{altrove}\,.$$

Quindi: $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, $\forall (x, y)$. Allora, X e Y sono indipendenti e con distribuzione uniforme, rispettivamente, negli intervalli $[0, 2]$ e $[0, 3]$. Pertanto

$$\mathbb{P}(3X - 2Y) = 3\mathbb{P}(X) - 2\mathbb{P}(Y) = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0\,;$$

inoltre

$$Var(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}\,, \quad Var(Y) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}\,, \quad Cov(X,Y) = 0\,,$$

e quindi: $Var(3X-2Y) = 9Var(X) + 4Var(Y) - 12\,Cov(X,Y) = 6$.

4. Per calcolare le probabilità degli eventi A, B, C occorre integrare $f(x,y)$ rispettivamente sul triangolo T_A, di vertici $(0,0), (2,0), (2,3)$, sul triangolo T_B, di vertici $(0,0), (2,0), (0,3)$, e sul quadrato Q_C, di vertici $(0,0), (2,0), (2,\frac{3}{2}), (0,\frac{3}{2})$. Essendo la distribuzione uniforme, si ha
$$P(A) = \frac{\mu(T_A)}{\mu(R)} = \frac{1}{2}\,, \quad P(B) = \frac{\mu(T_B)}{\mu(R)} = \frac{1}{2}\,, \quad P(C) = \frac{\mu(Q_C)}{\mu(R)} = \frac{1}{2}\,;$$
pertanto A, B, C sono equiprobabili. Inoltre, all'evento AB corrisponde il triangolo T_{AB}, di vertici $(0,0), (2,0), (1,\frac{3}{2})$ e quindi
$$P(AB) = \frac{\mu(T_{AB})}{\mu(R)} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)\,;$$
pertanto A e B sono indipendenti.