Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma* - 22/4/2005)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Da un'urna U contenente 1 pallina bianca e 1 nera si effettuano 3 estrazioni con restituzione, inserendo ogni volta in un'urna V inizialmente vuota una pallina di colore opposto a quella estratta da U. Sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U e Y il numero aleatorio di palline bianche inserite in V. Calcolare: il coefficiente di correlazione ρ_{XY}, la covarianza di X, Y e lo scarto quadratico medio di Y.

   $\rho_{XY} =$ $\sigma_{XY} =$ $\sigma_Y =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga di non conoscere il valore di Y e di estrarre in blocco 2 palline da V. Posto $H_r = (Y = r)$, $r = 0, 1, 2, 3$; $E =$ *"le palline estratte da V sono entrambe nere"*, calcolare $P(H_0 \mid E)$.

   $P(H_0 \mid E) =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{x}{2}$ per $0 \leq x < 2$, $f(x) = \frac{1}{2}$ per $2 \leq x \leq a$, con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la costante a e la probabilità p dell'evento $(-\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{5}{2})$.

   $a =$ $p =$

4. Dati due numeri aleatori X, Y, indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$, calcolare la probabilità α dell'evento $(X + Y > 1)$.

   $\alpha =$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. Terr. - Roma*)

Soluzioni della prova scritta del 22/4/2005.

1. Si ha $X \in \{0,1,2,3\}$, $Y = 3 - X$; pertanto $\rho = -1$. Inoltre, essendo $X \sim B(3, \frac{1}{2})$, segue

$$\sigma_{XY} = Cov(X, 3-X) = -Cov(X,X) = -Var(X) = -npq = -\frac{3}{4}\,.$$

Infine $Var(Y) = Var(3 - X) = Var(X) = \frac{3}{4}$; pertanto $\sigma_Y = \sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Osservando che $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ e che $P(Y = r) = P(X = 3 - r), r = 0,1,2,3$, si ha

$$P(H_0) = P(X=3) = \frac{1}{8}\,, \quad P(H_1) = P(X=2) = \frac{3}{8}\,,$$

$$P(H_2) = P(X=1) = \frac{3}{8}\,, \quad P(H_3) = P(X=0) = \frac{1}{8}\,;$$

$$P(E\,|\,H_0) = 1\,, \quad P(E\,|\,H_1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}\,, \quad P(E\,|\,H_2) = P(E\,|\,H_3) = 0\,.$$

Allora

$$P(H_0\,|\,E) = \frac{P(EH_0)}{P(E)} = \frac{P(E\,|\,H_0)P(H_0)}{\sum_r P(E\,|\,H_r)P(H_r)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{8}}{1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Dev'essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx + \int_2^a \frac{1}{2}\,dx = 1 + (a-2)\frac{1}{2} = 1\,;$$

da cui segue: $a = 2$. Pertanto $f(x) = \frac{x}{2}$ per $0 \le x < 2$, $f(2) = \frac{1}{2}$, con $f(x) = 0$ altrove. Inoltre, osservando che $F(-\frac{5}{2}) = 0$, $F(\frac{5}{2}) = 1$, segue

$$p = F(\frac{5}{2}) - F(-\frac{5}{2}) = 1 - 0 = 1\,.$$

4. Osservando che $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = e^{-x-y}$ per $x \ge 0, y \ge 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove, segue

$$p = 1 - P(X + Y \le 1) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-x-y}\,dy = 1 - \int_0^1 e^{-x}(1 - e^{-(1-x)})dx =$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx + \int_0^1 e^{-1}\,dx = 1 - (1 - e^{-1}) + e^{-1} = 2e^{-1}\,.$$