Calcolo delle probabilità (11/6/2005)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è $\mathcal{C} = \{(0,2),(1,1),(2,0),(2,2)\}$. Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma $p(0,2) = p(1,1) = p(2,0) = p > 0$. Determinare il valore p tale che la covarianza di X, Y è nulla.

$$p =$$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{x+1}{2}$, per $x \in [-1, 0]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (0, \frac{3}{2}]$, $f(x) = 0$ altrove. Calcolare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = 3P(X \leq x_0)$.

$$x_0 =$$

3. Un cassetto contiene 6 chiavi, delle quali 2 sono adatte ad aprire una certa serratura. Dal cassetto si prendono in blocco 3 chiavi, una delle quali scelta a caso viene utilizzata per cercare di aprire la serratura. Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra le 3 chiavi prese in blocco ve ne sono r adatte ad aprire la serratura"*, $r = 0, 1, 2$; $E =$ *"la chiave scelta a caso apre la serratura"*, calcolare $P(H_2|E)$.

$$P(H_2|E) =$$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = ax + (2 - a)y$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a \in [0, 2]$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a tale che gli eventi $(X \leq Y)$ e $(X > Y)$ sono equiprobabili.

$$a =$$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 11/6/2005.

1. Essendo $p(0,2)+p(1,1)+p(2,0)=3p\leq 1$, segue $0<p\leq \frac{1}{3}$. Inoltre
$$X\in\{0,1,2\}\,,\qquad Y\in\{0,1,2\}\,,\qquad XY\in\{0,1,4\}\,,$$
con
$$P(X=0)=P(X=1)=p\,,\quad P(X=2)=1-2p\,,$$
$$P(Y=0)=P(Y=1)=p\,,\quad P(Y=2)=1-2p\,,$$
$$P(XY=0)=2p\,,\quad P(XY=1)=p\,,\quad P(XY=4)=1-3p\,,$$
$$\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)=2-3p\,,\quad \mathbb{P}(XY)=4-11p\,.$$
Ricordando che $p>0$, si ha
$$Cov(X,Y)=\mathbb{P}(XY)-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=-9p^2+p=0\iff p=\frac{1}{9}\,.$$

2. Essendo $P(X\leq x_0)+P(X>x_0)=1$, dev'essere $P(X\leq x_0)=\frac{1}{4}$, $P(X>x_0)=\frac{3}{4}$. Allora, osservando che
$$\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{2}\,dx=\frac{1}{4}\,,\qquad \int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-x_0\right)=\frac{3}{4}\,,$$
segue: $x_0=0$.

3. Si ha $P(H_r)=\frac{\binom{2}{r}\binom{4}{3-r}}{\binom{6}{3}}$, $r=0,1,2$; quindi
$$P(H_0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}\,,\quad P(H_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{5}\,,\quad P(H_2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{5}\,;$$
inoltre
$$P(E|H_0)=0\,,\quad P(E|H_1)=\frac{1}{3}\,,\quad P(E|H_2)=\frac{2}{3}\,.$$
Pertanto
$$P(E)=P(E|H_0)P(H_0)+P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2)=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\,;$$
infine
$$P(H_2|E)=\frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}\,.$$

4. Dev'essere $P(X\leq Y)=P(X>Y)=\frac{1}{2}$. Allora, segue
$$P(X>Y)=\int_0^1 dx\int_0^x[ax+(2-a)y]\,dy=\int_0^1[axy+\frac{2-a}{2}\,y^2]_0^x\,dx=$$
$$=\int_0^1(ax^2+\frac{2-a}{2}\,x^2)\,dx=\frac{2+a}{6}\,[x^3]_0^1=\frac{2+a}{6}=\frac{1}{2}\iff a=1\,.$$