Calcolo delle probabilità (16/9/2005)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [-\frac{3}{2}, 0]$, $f(x) = \frac{-x+1}{2}$, per $x \in (0, 1]$, con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la funzione di ripartizione di X e la probabilità α dell'evento $(X > \frac{1}{2})$.

$$F(x) = \begin{cases} \quad\quad\quad\quad , \\ \quad\quad\quad\quad , \\ \quad\quad\quad\quad , \\ \quad\quad\quad\quad , \end{cases} \qquad\qquad \alpha =$$

2. Siano dati due lotti L_1 ed L_2, contenenti ciascuno 1 componente difettoso e 4 buoni. Da ognuno dei due lotti si estraggono in blocco 2 componenti, con i quali si forma un lotto L_3. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi contenuti in L_3, calcolare, per ogni valore possibile x di X, la probabilità p_x dell'evento $(X = x)$.
(*Nota: indicare con Y (risp., Z) il numero di pezzi difettosi estratti da L_1 (risp., L_2)*).

x :

p_x :

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = k(x + y)$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore della costante k e la previsione del numero aleatorio XY.

$k =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(XY) =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 16/9/2005.

1. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq -\frac{3}{2}$, $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Inoltre, per $x \in (-\frac{3}{2}, 0]$, si ha

$$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^{x} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{2}) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\,.$$

Infine, per $x \in (0,1)$, si ha

$$F(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{1}{2}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{-t+1}{2}\, dt = \frac{3}{4} + \frac{-x^2+2x}{4} = \frac{-x^2+2x+3}{4}\,.$$

Allora

$$\alpha = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \cdots = 1 - \frac{-\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{1}{16}\,.$$

2. Si ha $X = Y + Z$, con Y e Z stocasticamente indipendenti e con

$$P(Y=0) = P(Z=0) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,, \qquad P(Y=1) = P(Z=1) = \frac{2}{5}\,.$$

Allora $X \in \{0,1,2\}$, con

$$P(X=0) = p_0 = P(Y=0)P(Z=0) = \tfrac{9}{25}\,,$$

$$P(X=1) = p_1 = P(Y=0)P(Z=1) + P(Y=1)P(Z=0) = \tfrac{12}{25}\,,$$

$$P(X=2) = p_2 = P(Y=1)P(Z=1) = \tfrac{4}{25}\,.$$

3. Si ha

$$\int_0^2 \int_0^1 k(x+y)\, dxdy = \cdots = 3k = 1\,;$$

pertanto: $k = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$\mathbb{P}(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy \cdot \frac{1}{3}(x+y)\, dxdy = \cdots = \frac{2}{3}\,.$$