

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 5 punti)

1. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 3. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 3 studenti (scelto a caso). Definiti gli eventi  $H_r =$  "fra i 3 studenti estratti a caso ve ne sono  $r$  che sanno risolvere il quesito",  $r = 0, 1, 2$ ;  $A =$  "lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito", calcolare la probabilità condizionata  $p$  che nessuno dei 3 studenti estratti sappia risolvere il quesito, supposto vero  $A$ .

$$p =$$

2. Sia  $f(x)$  la densità di probabilità di un numero aleatorio continuo  $X \in [0, +\infty)$ , con  $f(x) = \frac{x}{2}$  nell'intervallo  $[0, 1]$  ed  $f(x) = \frac{1}{2}$  nell'intervallo  $(1, 2]$ . Calcolare il valore  $x_0$  tale che  $F(x_0) = S(x_0)$ .

$$x_0 =$$

3. Un sistema  $S$  è costituito da due dispositivi  $A$  e  $B$  in serie, con tempi aleatori di durata  $X$  e  $Y$  rispettivamente. La densità congiunta di  $(X, Y)$  è  $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$ , per  $x \geq 0, y \geq 0$ , con  $f(x, y) = 0$  altrove. Indicando con  $Z$  il tempo aleatorio fino al guasto di  $S$ , calcolare la funzione di rischio  $h_Z(z)$  di  $Z$ , per ogni  $z > 0$ .

$$h_Z(z) =$$

4. Da un'urna, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 1 nera, si effettuano 3 estrazioni con restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna una pallina dello stesso colore di quella estratta. Definiti gli eventi  $E_i =$  "l' $i$ -ma pallina estratta è bianca",  $i = 1, 2, 3$ , stabilire se  $E_1, E_2, E_3$  sono equiprobabili.

$$E_1, E_2, E_3 \text{ equiprobabili?}$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se  $E_1, E_2, E_3$  sono scambiabili.

$$E_1, E_2, E_3 \text{ scambiabili?}$$

6. Con riferimento agli ultimi due esercizi, calcolare la funzione caratteristica  $\varphi(t)$  del numero aleatorio  $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ .

$$\varphi(t) =$$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio  $\Theta$  è normale con parametri  $m_0 = 0, \sigma_0 = 2$ . Le componenti di un campione casuale  $(X_1, X_2)$ , subordinatamente ad ogni fissato valore  $\theta$  di  $\Theta$ , hanno una distribuzione normale con valor medio  $\theta$  e scarto standard  $\sigma = 1$ . Supposto di aver osservato un campione casuale  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , con  $x_1 + x_2 = 0$ , stabilire per quale valore  $\theta_0$  risulta  $P(\Theta > \theta_0 | \mathbf{x}) = \Phi(1)$ .

$$\theta_0 =$$

Soluzioni della prova scritta del 1/7/2005.

1. Si ha:  $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{3-r}}{\binom{6}{3}}$ ,  $r = 0, 1, 2$ ; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5};$$

inoltre:  $P(A|H_0) = 1$ ,  $P(A|H_1) = \frac{2}{3}$ ,  $P(A|H_2) = \frac{1}{3}$ . Allora

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3};$$

pertanto:  $p = P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$ .

2. Dev'essere  $F(x_0) = 1 - F(x_0)$  e quindi  $F(x_0) = \frac{1}{2}$ . Inoltre  $F(x) = 0$ , per  $x \leq 0$ ;  $F(x) = \frac{x^2}{4}$ , per  $0 < x \leq 1$ ;  $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2}$ , per  $1 < x \leq 2$ . Essendo  $F(x)$  crescente nell'intervallo  $(0, 2)$ , con  $F(1) = \frac{1}{4}$ ,  $F(2) = \frac{3}{4}$ , si ha  $x_0 \in (1, 2)$  e risolvendo l'equazione  $\frac{1}{4} + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$ , si ottiene  $x_0 = \frac{3}{2}$ .

3. Si ha  $Z = \min \{X, Y\}$  e quindi  $(Z > z) = (X > z, Y > z)$ . Allora, per ogni fissato  $z > 0$ , si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = \int_z^{+\infty} \int_z^{+\infty} 3e^{-(x+3y)} dx dy = \dots = e^{-4z};$$

pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-4z}}{e^{-4z}} = 4, \quad \forall z > 0.$$

( $Z$  ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda = 4$ )

4. Si ha

$$P(E_1) = \frac{1}{2}, \quad P(E_2) = P(E_1 E_2) + P(E_1^c E_2) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(E_1 E_2 E_3) + P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2 E_3) + P(E_1^c E_2^c E_3) = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto:  $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$ .

5. Per verificare la scambiabilità, oltre all'equiprobabilità (stabilita nell'esercizio precedente), occorre controllare le seguenti uguaglianze

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3).$$

Si ha  $P(E_1E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ . Inoltre

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3} = P(E_1E_2),$$

$$P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3} = P(E_1E_2).$$

Pertanto,  $E_1, E_2, E_3$  sono scambiabili.

6. Si ha  $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ , con

$$P(X = 0) = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = P(E_1E_2E_3) = P(X = 3);$$

quindi  $P(X = 0) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$ . Inoltre, ricordando che  $E_1, E_2, E_3$  sono scambiabili, si ha

$$P(X = 1) = 3P(E_1E_2^cE_3^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = 3P(E_1E_2E_3^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Pertanto

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^3 p_h e^{itx_h} = \sum_{h=0}^3 \frac{1}{4} e^{ith} = \frac{1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it}}{4}.$$

7. Si ha  $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{m_2, \sigma_2}$ , con  $m_2 = 0$  in quanto  $\bar{x} = m_0 = 0$ . Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4},$$

e quindi  $\sigma_2 = \frac{2}{3}$ . Pertanto  $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{0, \frac{2}{3}}$ . Allora

$$P(\Theta > \theta_0 | \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{0, \frac{2}{3}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 0}{\frac{2}{3}}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{2}\theta_0\right) = \Phi(1) \iff \theta_0 = -\frac{2}{3} = -\sigma_2.$$