Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 1/7/2005)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 5 punti)

1. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 3. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 3 studenti (scelto a caso). Definiti gli eventi $H_r =$ *"fra i 3 studenti estratti a caso ve ne sono r che sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; $A =$ *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*, calcolare la probabilità condizionata p che nessuno dei 3 studenti estratti sappia risolvere il quesito, supposto vero A.

   $p =$

2. Sia $f(x)$ la densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, +\infty)$, con $f(x) = \frac{x}{2}$ nell'intervallo $[0, 1]$ ed $f(x) = \frac{1}{2}$ nell'intervallo $(1, 2]$. Calcolare il valore x_0 tale che $F(x_0) = S(x_0)$.

   $x_0 =$

3. Un sistema S è costituito da due dispositivi A e B in serie, con tempi aleatori di durata X e Y rispettivamente. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con Z il tempo aleatorio fino al guasto di S, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ di Z, per ogni $z > 0$.

   $h_Z(z) =$

4. Da un'urna, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 1 nera, si effettuano 3 estrazioni con restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna una pallina dello stesso colore di quella estratta. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili.

   E_1, E_2, E_3 *equiprobabili* ?

5. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.

   E_1, E_2, E_3 *scambiabili* ?

6. Con riferimento agli ultimi due esercizi, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, con $x_1 + x_2 = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(1)$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 1/7/2005.

1. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{3-r}}{\binom{6}{3}}\,,\quad r = 0,1,2\,$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,,\quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,,\quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,;$$

inoltre: $P(A|H_0) = 1\,,\quad P(A|H_1) = \frac{2}{3}\,,\quad P(A|H_2) = \frac{1}{3}$. Allora

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{3}\,;$$

pertanto: $p = P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}\,.$

2. Dev'essere $F(x_0) = 1 - F(x_0)$ e quindi $F(x_0) = \frac{1}{2}$. Inoltre $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = \frac{x^2}{4}$, per $0 < x \leq 1$; $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2}$, per $1 < x \leq 2$. Essendo $F(x)$ crescente nell'intervallo $(0,2)$, con $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(2) = \frac{3}{4}$, si ha $x_0 \in (1,2)$ e risolvendo l'equazione $\frac{1}{4} + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$, si ottiene $x_0 = \frac{3}{2}$.

3. Si ha $Z = min\,\{X, Y\}$ e quindi $(Z > z) = (X > z, Y > z)$. Allora, per ogni fissato $z > 0$, si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = \int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty} 3e^{-(x+3y)}dxdy = \cdots = e^{-4z}\,;$$

pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-4z}}{e^{-4z}} = 4\,,\quad \forall\, z > 0\,.$$

(*Z ha una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda = 4$)

4. Si ha

$P(E_1) = \frac{1}{2}\,,\quad P(E_2) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2) = \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2},$

$P(E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \cdots =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

Pertanto: $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$.

5. Per verificare la scambiabilità, oltre all'equiprobabilità (stabilita nell'esercizio precedente), occorre controllare le seguenti uguaglianze

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3)\,.$$

Si ha $P(E_1E_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{3} = P(E_1E_2)\,,$$

$$P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{3} = P(E_1E_2)\,.$$

Pertanto, E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.

6. Si ha $X \in \{0,1,2,3\}$, con

$$P(X=0) = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = P(E_1E_2E_3) = P(X=3)\,;$$

quindi $P(X=0) = P(X=3) = \frac{1}{4}$. Inoltre, ricordando che E_1, E_2, E_3 sono scambiabili, si ha

$$P(X=1) = 3P(E_1E_2^cE_3^c) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}\,, \qquad P(X=2) = 3P(E_1E_2E_3^c) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Pertanto

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{3} p_h\, e^{itx_h} = \sum_{h=0}^{3} \frac{1}{4}\, e^{ith} = \frac{1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it}}{4}\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_2,\sigma_2}$, con $m_2 = 0$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 0$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}\,,$$

e quindi $\sigma_2 = \frac{2}{3}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{0,\frac{2}{3}}$. Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{0,\frac{2}{3}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 0}{\frac{2}{3}}\right) = \Phi\left(-\tfrac{3}{2}\,\theta_0\right) = \Phi(1) \iff \theta_0 = -\tfrac{2}{3} = -\sigma_2\,.$$