

Calcolo delle probabilità (10/1/2006)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Sia data una costante $a \in (0, 2)$. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = x$, per $x \in [0, a]$, $f(x) = a$, per $x \in (a, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la probabilità α dell'evento $(X > 1)$.

$$a =$$

$$\alpha =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente e utilizzando il valore trovato per a , dato un numero aleatorio X con densità $f(x)$, determinare la funzione di ripartizione di X .

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} , \\ , \\ , \\ , \end{array} \right.$$

3. Da un'urna, contenente 1 pallina bianca e 4 nere, si effettuano n estrazioni con restituzione. Indicando con X il numero aleatorio di volte in cui esce pallina bianca e con h un valore possibile di X , calcolare la probabilità $p_h = P(X = h)$. Inoltre, considerando l'evento $E_1 = \text{"nella 1}^{\text{a}} \text{ estrazione esce pallina bianca"}$, calcolare la probabilità condizionata $\gamma = P(E_1 | X \geq 1)$.

$$p_h =$$

$$\gamma =$$

4. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo, con tempi di durata aleatoria fino al guasto rispettivamente X, Y , stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare la previsione del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di S .

$$E(T) =$$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. e Terr. - Roma*)
Soluzioni della prova scritta del 10/1/2006.

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero

$$\int_0^a x dx + \int_a^2 a dx = \dots = \frac{a^2}{2} + a(2-a) = 1.$$

Allora, ricordando che $0 < a < 2$, segue: $a = 2 - \sqrt{2}$. Infine

$$\alpha = P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 (2 - \sqrt{2}) dx = 2 - \sqrt{2}.$$

2. Per $x \leq 0$ si ha $F(x) = 0$; per $x \in (0, 2 - \sqrt{2}]$ si ha

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2};$$

per $x \in (2 - \sqrt{2}, 2)$ si ha

$$F(x) = \int_0^{2-\sqrt{2}} t dt + \int_{2-\sqrt{2}}^x (2 - \sqrt{2}) dt = \dots = (2 - \sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2};$$

per $x \geq 2$ si ha $F(x) = 1$.

3. X ha una distribuzione binomiale $B(n, \frac{1}{5})$; pertanto

$$p_h = P(X = h) = \binom{n}{h} \left(\frac{1}{5}\right)^h \left(\frac{4}{5}\right)^{n-h}, \quad h = 0, 1, \dots, n.$$

Inoltre

$$\gamma = P(E_1 | X \geq 1) = \frac{P[E_1 \wedge (X \geq 1)]}{P(X \geq 1)} = \frac{P(E_1)}{1 - P(X=0)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{5^{n-1}}{5^n - 4^n}.$$

4. Per ogni fissato $t > 0$, si ha

$$P(X \leq t) = P(Y \leq t) = 1 - e^{-2t}.$$

Allora

$$P(T \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = (1 - e^{-2t})^2,$$

con $P(T \leq t) = 0$, per ogni $t \leq 0$. Pertanto, la densità di probabilità di T è

$$f(t) = 4e^{-2t}(1 - e^{-2t}) = 4e^{-2t} - 4e^{-4t},$$

per $t > 0$, con $f(t) = 0$ altrove. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T) &= \int_0^{+\infty} t f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} t \cdot 2e^{-2t} dt - \int_0^{+\infty} t \cdot 4e^{-4t} dt = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(Nota: $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.)