

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Da un'urna, contenente sei palline, di cui due numerate con il numero 0, tre con il numero 1 e una con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con X il risultato della prima estrazione e con Y il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X + Y$. Calcolare la probabilità dell'evento ($Z \leq 0$).

$$P(Z \leq 0) =$$

2. Dati due n. a. X, Y incorrelati e con distribuzione normale standard, calcolare il coefficiente di correlazione ρ dei n. a. $U = 2X + Y, V = X - 2Y$.

$$\rho =$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ax + by$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a > 0, b > 0$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Esprimere la densità $f(x, y)$ utilizzando solo la costante a . Inoltre, determinare il valore di a tale che $P(X \leq Y) = P(X > Y)$.

$$f(x, y) =$$

$$a =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = 1$, determinare la funzione di ripartizione marginale $F_1(x)$.

$$F_1(x) = \left\{ \begin{array}{l} , \\ , \\ , \end{array} \right.$$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. e Terr. - Roma*)
Soluzioni della prova scritta del 22/4/2006.

1. Si ha $(Z \leq 0) = (Z = 0) = (X = 0, Y = 0)$; pertanto

$$P(Z \leq 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0 | X = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

2. Si ha $P(X) = P(Y) = 0$ e quindi $P(2X + Y) = P(X - 2Y) = 0$; inoltre

$$P(X^2) = P(Y^2) = 1, \quad P(XY) = P(X)P(Y) = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} Cov(U, V) &= Cov(2X + Y, X - 2Y) = P[(2X + Y)(X - 2Y)] - P(2X + Y)P(X - 2Y) = \\ &= P(2X^2 - 3XY - 2Y^2) = 2P(X^2) - 3P(XY) - 2P(Y^2) = 0. \end{aligned}$$

Quindi: $\rho = 0$.

3. Si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 (ax + by) dx dy = \dots = \frac{a + b}{2} = 1;$$

pertanto $b = 2 - a$ e quindi: $f(x, y) = ax + (2 - a)y$. Inoltre

$$P(X \leq Y) = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_x^1 [ax + (2 - a)y] dy = \dots = \frac{2}{3} - \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \iff a = 1.$$

4. Per $x \in [0, 1]$ si ha

$$f_1(x) = \int_0^1 (x + y) dy = \dots = x + \frac{1}{2},$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_1(x) = 1$ per $x \geq 1$. Inoltre, per $0 < x < 1$, si ha

$$F_1(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2}) dt = \dots = \frac{x^2 + x}{2}.$$