Calcolo delle Probabilità (15/9/2006)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3, con

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}\,,\; P(E_1E_2) = P(E_2E_3) = \frac{5}{18}\,,\; P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{6}\,,$$

calcolare la probabilità p dell'evento $E_1E_2^c \vee E_1^cE_2E_3$.

$$p =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 4e^{-2x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità α_t dell'evento $X + Y > t$.

$$\alpha_t =$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la covarianza dei numeri aleatori $U = X + Y,\; V = Y - X$.

$$Cov(U, V) =$$

Calcolo delle Probabilità (Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 15/9/2006.

1. Si ha

$$P(E_1E_2^c) = P(E_1) - P(E_1E_2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{2}{9}\,; \quad P(E_1^cE_2E_3) = P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{5}{18} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9}\,;$$

pertanto

$$p = P(E_1E_2^c) + P(E_1^cE_2E_3) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\,.$$

2. I costituenti sono $C_1 = E_1E_2$, $C_2 = E_1E_2^c$, $C_3 = E_1^cE_2$, $C_4 = E_1^cE_2^c$, ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: 2, 1, 1, 0. Inoltre

$$P(C_1) = \frac{5}{18}\,,\; P(C_2) = P(C_3) = \frac{2}{9}\,,\; P(C_4) = 1 - P(C_1) - P(C_2) - P(C_3) = \frac{5}{18}\,.$$

Pertanto:

$$P(X = 0) = \frac{5}{18}\,, \quad P(X = 1) = \frac{4}{9}\,, \quad P(X = 2) = \frac{5}{18}\,.$$

Allora

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{5}{18}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{13}{18}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Si ha

$$\alpha_t = P(X + Y > t) = 1 - P(X + Y \leq t) = 1 - \int_0^t dx \int_0^{t-x} 4e^{-2x-2y} dy = \cdots =$$

$$= 1 - (1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}) = (1 + 2t)\, e^{-2t}\,.$$

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2x-2y}\, dy = \cdots = 2e^{-2x}\,, \quad x \geq 0\,,$$

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2x-2y}\, dx = \cdots = 2e^{-2y}\,, \quad y \geq 0\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Inoltre $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x, y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Allora

$$Cov(U, V) = Cov(X + Y, Y - X) = Cov(X, Y) - Cov(X, X) + Cov(Y, Y) - Cov(Y, X) =$$

$$= -Var(X) + Var(Y) = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0\,.$$