Calcolo delle Probabilità (20/6/2006)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Un lotto contenente 7 pezzi (2 difettosi e 5 buoni) viene diviso a caso in due lotti L_1 ed L_2, contenenti rispettivamente 3 pezzi e 4 pezzi. Successivamente, da ciascuno dei due lotti si estrae a caso un pezzo. Definiti gli eventi $A =$ *"il pezzo estratto da L_1 è difettoso"*, $B =$ *"il pezzo estratto da L_2 è difettoso"*, verificare se $P(A) = P(B)$.
(*N.B.: utilizzare gli eventi $H_r =$ "il lotto L_1 contiene r pezzi difettosi"*, $r = 0, 1, 2$).

$$P(A) = P(B) \ ?$$

2. Dati tre eventi A, B e C, con $AB = \emptyset$, $A \vee B \subset C$, e con $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{5}{6}$, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| + B| - 2|C|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [1, 2]$ è $f(x) = \frac{k}{x^2}$ per $x \in [1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la previsione di X.

$k =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{2}{9}(3 - x - y)$, per $(x, y) \in C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3\,,\ 0 \leq y \leq 3 - x\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il rapporto r tra le probabilità degli eventi $(X + Y > 1)$ e $(X + Y \leq 1)$.

$r =$

Calcolo delle Probabilità (Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 20/6/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}\,;$$

$$P(A\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(A\,|\,H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(B\,|\,H_0) = \frac{2}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_1) = \frac{1}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_2) = 0\,.$$

Quindi:

$$P(A) = P(A\,|\,H_0)P(H_0) + P(A\,|\,H_1)P(H_1) + P(A\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,,$$

$$P(B) = P(B\,|\,H_0)P(H_0) + P(B\,|\,H_1)P(H_1) + P(B\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,.$$

Pertanto: $P(A) = P(B)$.

2. I costituenti sono:

$$C_1 = AB^cC = A, \;\; C_2 = A^cBC = B, \;\; C_3 = A^cB^cC, \;\; C_4 = A^cB^cC^c = C^c,$$

ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: -1, -1, -2, 0. Inoltre

$$P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{3}\,, \quad P(C_3) = P(C) - P(A \vee B) = \frac{1}{6}\,, \quad P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Pertanto

$$P(X=-2) = P(C_3) = \frac{1}{6}\,, \quad P(X=-1) = P(C_1)+P(C_2) = \frac{2}{3}\,, \quad P(X=0) = P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{6}, & -2 \le x < -1 \\ \frac{5}{6}, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

3. Imponendo la condizione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, segue

$$\int_1^2 \frac{k}{x^2}\,dx = k\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = k\left(-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2} = 1\,;$$

pertanto: $k = 2$. Inoltre

$$I\!\!P(X) = \int_1^2 x\,\frac{2}{x^2}\,dx = \cdots = ln\,4\,.$$

4. Si ha $P(X+Y>1) = 1 - P(X+Y\leq 1)$; inoltre

$$P(X+Y\leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2}{9}(3-x-y)dy = \cdots = \frac{7}{27}\,.$$

Pertanto: $r = \frac{\frac{20}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{20}{7}\,.$